

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 10

Abgabe: 18. Januar 2016 – 14:00 Uhr

(Dieser Übungszettel enthält 5 Aufgaben mit insgesamt 31 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Entscheidungsbaum) (4 Punkte)

Sie sind Münzprüfer und haben die Aufgabe, eine Fälschung aus acht Münzen (sieben echte) herauszufinden. Die Fälschung unterscheidet sich von den Echten nur durch ihr Gewicht. Ihnen ist allerdings nicht bekannt ob die Fälschung leichter oder schwerer ist als die echten Münzen. Für Ihre Aufgabe steht ihnen eine Balkenwaage zur Verfügung. Diese liefert die Ergebnisse *links schwerer*, *gleich schwer* oder *rechts schwerer*. Leider drängt Ihr Chef auf Fertigstellung der Arbeit, so dass Ihnen nur Zeit für drei Wägungen bleibt. Beschreiben Sie diese Aufgabe durch einen Entscheidungsbaum der Höhe 3, dessen innere Knoten Wiegevorgänge repräsentieren. Dabei soll ein innerer Knoten jeweils mit einem Tupel (X, Y) beschriftet sein, wobei X den Inhalt der linken und Y den Inhalt der rechten Waagschale definiert. Bewerten Sie die Ausgangskanten e eines inneren Knoten mit Beschriftung (X, Y) folgendermaßen:

$$m(e) = \begin{cases} 1 & \text{Inhalt von } X \text{ ist schwerer als Inhalt von } Y \\ -1 & \text{Inhalt von } X \text{ ist leichter als Inhalt von } Y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Blätter sollen mit den falschen Münzen bewertet werden.

Aufgabe 2 (Grammatiken) (7 Punkte)

Gegeben Sei die folgende Grammatik $G = (T, N, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} T &= \{ (,) \} \\ N &= \{ \text{Klammerung}, \text{Liste} \} \\ S &= \text{Klammerung} \\ P &= \{ \text{Klammerung} ::= \text{'('Liste' }, \\ &\quad \text{Liste} ::= \text{Klammerung Liste}, \\ &\quad \text{Liste} ::= \epsilon \\ &\quad \} \end{aligned}$$

1. Modifizieren Sie die Grammatik G zu \tilde{G} , so dass diese die Sprache der Klammerausdrücke erzeugt¹.

¹Siehe Foliensatz 07-Grammatiken, Folie 2

2. Modifizieren Sie \tilde{G} zu einer kontextfreien Grammatik G_2 . Dabei soll die von G_2 erzeugte Sprache zusätzlich auch Wörter mit geschweiften Klammerpaaren $\{ \}$ enthalten. Dabei soll jede Klammer immer von einer Klammer des gleichen Typs wieder geschlossen werden. In der von G_2 erzeugten Sprache soll also zum Beispiel *nicht* das Wort $\{ \}$ enthalten sein.
3. Definieren Sie nun eine kontextfreie Grammatik G_3 indem Sie G_2 so modifizieren, dass in Wörtern aus $L(G_3)$ zwischen runden Klammern $()$ nie geschweifte Klammern $\{ \}$ auftreten. So soll zum Beispiel das Wort $\{ () \}$ in $L(G_3)$ enthalten sein, nicht jedoch das Wort $\{ \{ \}$. Dabei soll diese Grammatik maximal 8 Produktionen enthalten.

Aufgabe 3 (Sprachen, Grammatiken)

(8 Punkte)

Gegeben seien die folgende Sprachen

$$L_1 = \{(010)^n aa1^m \text{ mit } n \geq 1 \text{ und } m \geq 0\} \cup \{(010)^n aa0^m \text{ mit } n \geq 0 \text{ und } m \geq 1\}$$

$$L_2 = \{(010)^n aa1^m \text{ mit } n \geq 0 \text{ und } m \geq 1\} \cup \{(010)^n aa0^m \text{ mit } n \geq 0 \text{ und } m \geq 1\}$$

1. Geben Sie eine Grammatik G_1 an, die die Sprache L_1 erzeugt.
2. Geben Sie eine Grammatik G_2 an, die die Sprache L_2 erzeugt.
3. Wie sieht die formale Beschreibung von $L_1 \cap L_2$ aus? Geben Sie sie an.
4. Geben Sie eine Grammatik G_3 an, die den Durchschnitt der beiden Sprachen erzeugt.

Anmerkung: $(010)^n$ bedeutet (analog zu 1^n), dass das Wort 010 n-mal wiederholt wird.

Aufgabe 4 (Grammatik)

(7 Punkte)

Gegeben sei folgende Grammatik $G = (T, \{X\}, P, S)$ mit $T = \{A, B, (,), \neg, \vee, \wedge, 0, 1\}$, dem Startsymbol $S = X$ und den Produktionen:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} X ::= '(X)', \\ X ::= A, \\ X ::= B, \\ X ::= 0, \\ X ::= 1, \\ X ::= \neg X, \\ X ::= X \vee X, \\ X ::= X \wedge X \end{array} \right\}$$

1. Beschreiben Sie umgangssprachlich, welche Sprache die Grammatik G beschreibt.
2. Sind die folgende Ausdrücke Elemente von $L(G)$?
 - a) $(\neg A \vee B)$
 - b) $((AB) \vee \neg A) \wedge (B)$
 - c) $(A \wedge 0) \vee \neg(1)$

Beweisen Sie Ihre Antwort.

3. Zeigen Sie, dass die Grammatik G *nicht* eindeutig ist.

4. Geben Sie eine *eindeutige* Grammatik G' an, so dass $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 5 (Grammatik bilden)

(5 Punkte)

Die Sprache der Palindrome lässt sich durch die drei folgenden Bildungsregeln beschreiben:

- Das leere Wort ε sowie 0 und 1 sind Palindrome.
- Falls w ein Palindrom ist, sind $0w0$ und $1w1$ Palindrome.
- Alle Palindrome lassen sich durch endlich viele Anwendungen der ersten beiden Regeln erzeugen.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (T, N, P, S)$ an, die die Sprache der Palindrome erzeugt.

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Worte Element der durch die kontextfreie Grammatik aus (1) definierten Sprache sind:

a) 010111010

b) 1101101011

Geben Sie jeweils den zugehörigen Ableitungsbaum an bzw. begründen Sie, warum das Wort kein Element der durch Ihre Grammatik definierten Sprache ist.