Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

15. Januar 2016

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 11
Abgabe: 25. Januar 2016 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 6 Aufgaben mit insgesamt 32 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Grammatiken, Normalformen) (4 Punkte)
Gegeben Sei die folgende Sprache

$$L_1 = \{ \ w \in \{0,1\}^* | w = 0^n 1001^m \text{ mit } n, m \geq 0\}.$$

1. Geben Sie eine Grammatik G in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L_1$ an.
2. Geben Sie eine Grammatik G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L_1$ an.

Aufgabe 2 (Sprachen, Grammatiken, Beweis) (12 Punkte)

(a) Gegeben ist die folgende Definition.

Definition 2.1 *Sei Σ ein Alphabet, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ und sei L eine Sprache über Σ. Dann sei*

$$\epsilon^R = \epsilon \ , \quad (wa)^R = aw^R \text{ und } \quad L^R = \{w^R \in \Sigma^* \mid w \in L\} \ .$$

Seien nun Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ, und $a \in \Sigma$ beliebig aber fest. Beweisen Sie jeweils *per Induktion über Wortlängen*, dass

(1) für alle $w \in \Sigma^*$ gilt, dass $(aw)^R = w^R a$, und

(2) $(L^R)^R = L$.

(b) Betrachten Sie weiterhin folgende Definitionen.

Definition 2.2 *Eine kontextfreie Grammatik $G = (T, N, P, S)$ ist eine r-Typ Grammatik, wenn jede Regel in P von der Form*

$$\begin{aligned} & A ::= aB \\ \textit{oder} \quad & A ::= \epsilon \end{aligned}$$

mit $A, B \in N$ und $a \in T$, ist.

Definition 2.3 *Eine kontextfreie Grammatik $G = (T, N, P, S)$ ist eine l-Typ Grammatik, wenn jede Regel in P von der Form*

$$\begin{aligned} & A ::= Ba \\ \textit{oder} \quad & A ::= \epsilon \end{aligned}$$

mit $A, B \in N$ und $a \in T$, ist.

Gegeben sei eine r-Typ Grammatik $G_r = (T_r, N_r, P_r, S)$.

Geben Sie eine l-Typ Grammatik $G_l = (T_l, N_l, P_l, S)$ an, so dass gilt $L(G_l) = L(G_r)^R$. Beweisen Sie außerdem, dass $L(G_l) = L(G_r)^R$ gilt.

Hinweis: Für diese Teilaufgabe dürfen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) verwenden.

Aufgabe 3 (Sprachen, Grammatiken, Reguläre Ausdrücke) (6 Punkte)
Gegeben sei folgende sprachliche Umschreibung einer Sprache:

> Die Sprache beinhaltet beliebige Folgen aus $\{0, 1\}^*$, die auf 01 enden, oder mit einer 1 beginnen.

1. Geben Sie die formale Definition der Sprache als Menge an.
2. Geben Sie eine Grammatik an, die diese Sprache erzeugt.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck mit maximal 25 Zeichen an, der diese Sprache erzeugt.

Aufgabe 4 (Sprachen, Reguläre Ausdrücke, Beweis) (4 Punkte)
Sei Σ ein Alphabet und L eine reguläre Sprache über Σ.

1. Zeigen Sie, dass L^+ regulär ist, indem Sie einen regulären Ausdruck R angeben und beweisen, dass $L(R) = L^+$ ist.
2. Es sei
$$L^* = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : w = w_1 \cdots w_n \wedge \forall i \leq n : w_i \in L\} \ .$$
Beweisen oder widerlegen Sie, dass für alle Sprachen L gilt: $L^+ \neq L^*$.

Aufgabe 5 (Reguläre Ausdrücke) (2 Punkte)
Sei R ein regulärer Ausdruck. Geben Sie $L(\epsilon R)$ und $L(\emptyset R)$ jeweils in Mengenschreibweise an. Sie dürfen dazu $L(R)$ verwenden. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (Reguläre Ausdrücke) (4 Punkte)
Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit maximal 45 Zeichen an, sodass

$$L(R) = \{0, 1\}^* \setminus \{10, 01\} \ .$$