Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

27. November 2015

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 6
Abgabe: 7. Dezember 2015 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel besteht aus 4 Aufgaben mit insgesamt 32 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Formalisieren) (10 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Prädikate:

- *RF(x)* bedeutet, dass x ein Rennfahrer ist.
- *RS(x)* bedeutet, dass x ein Rennstall ist.
- *FF(x,y)* bedeutet, dass x für den Rennstall y fährt.
- *G(x,y)* bedeutet, dass x das Rennen y gewinnt.
- *EQ(x,y)* bedeutet, dass x und y gleich sind.

1. Formalisieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe prädikatenlogischer Formeln. Nutzen Sie dazu die oben aufgeführten Prädikate.
   a) Jeder Rennstall hat mindestens 2 Rennfahrer.
   b) Jeder Fahrer fährt für genau einen Rennstall.
   c) Alle Rennfahrer, die für einen Rennstall fahren, gewinnen irgendwann mal ein Rennen.
   d) Wenn in einem Rennen kein Fahrer von Mercedes den ersten Platz belegt, belegt ein Fahrer von Ferrari den ersten Platz.
2. Ihr Freund Kevin-Arne meint, dass diese Aussagen implizieren würden, dass alle Fahrer für Mercedes oder Ferrari fahren. Helfen Sie Kevin-Arne dies zu beweisen.
   a) Zeigen Sie durch einen *direkten Beweis*, dass Kevin-Arne Recht hat.
   b) Zeigen Sie durch einen *Widerspruchsbeweis*, dass Kevin-Arne Recht hat.

Aufgabe 2 (Formalisieren) (10 Punkte)
Formulieren Sie die folgenden Aussagen über die ggf. unendlichen Teilmengen A, B und C der natürlichen Zahlen mit Hilfe geeigneten prädikatenlogischen Formeln. Verwenden Sie dabei nur die folgenden Prädikate und Terme einschließlich der angegebenen Interpretationen:

- $\omega = \mathbb{N} \cup pow(\mathbb{N})$
- P mit $\Im(P) = P_\omega = \mathbb{N}$
- Q mit $\Im(Q) = Q_\omega = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times pow(\mathbb{N}) | a \in b\}$
- R mit $\Im(R) = R_\omega = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
- Konstanten a, b, c mit $\Im(a) = a_\omega = A$, $\Im(b) = b_\omega = B$, $\Im(c) = c_\omega = C$

1. $A \cup B \subseteq C$
2. $A \subset B$
3. $C = A \cap B$
4. A, B, C sind paarweise disjunkt und $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$
5. $|A| < \infty$

   Hinweis: Jede nicht-leere, endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein größtes Element.

Aufgabe 3 (Substitution) (6 Punkte)

Gegeben seien folgende Substitutionen:

- $\sigma_1 = [x/f(x,y,z)]$
- $\sigma_2 = [y/f(y,z,x)]$
- $\sigma_3 = [z/f(z,x,y)]$

Berechnen Sie die Ergebnisse der folgenden zusammengesetzten Substitutionen. Geben Sie dabei auch die Gesamtsubstitution der hintereinander auszuführenden Einzelsubstitutionen an.

1. $f(x,y,z)\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2. $f(x,y,z)\sigma_3\sigma_2\sigma_1$
3. $f(x,y,z)\sigma_1\sigma_1\sigma_1$

Aufgabe 4 (Unifikation nach Robinson) (6 Punkte)

Prüfen Sie mit Hilfe des Unifikationsverfahrens von Robinson, welche der folgenden Primformeln mit den Variablen x, y und den Konstanten a, b unifizierbar sind. Schreiben Sie dazu die Schritte des Robinson-Verfahrens einzeln auf, und geben Sie einen allgemeinsten Unifikator an, wenn er existiert. Wenn ein Termpaar nicht unifizierbar ist, markieren sie die Stelle, an der keine weitere Unifikation möglich ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1. $P(h(x, g(y)))$ und $P(h(g(g(y)), x))$

2. $P(f(g(a), x))$ und $P(f(x, a))$
3. $P(f(a, x))$ und $P(f(x, b))$
4. $P(f(g(x, h(x)), y))$ und $P(f(y, g(h(a), z)))$
5. $P(x, f(x))$ und $P(y, y)$