Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

05. Februar 2016

Modellierung – WS 2015/2016

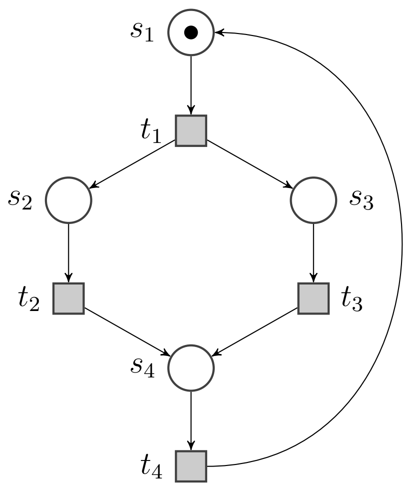
Präsenzübung 14
08. - 12. Februar 2016
(Dieser Übungszettel enthält 8 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

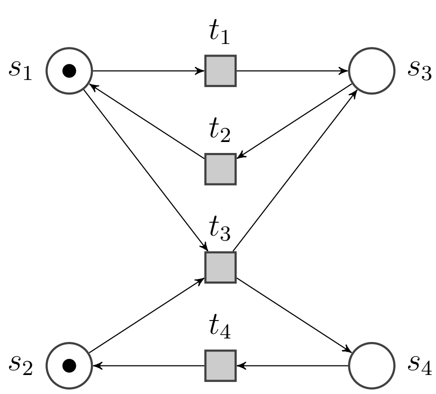
Aufgabe 1 (Petri-Netze)
Geben Sie ein Petri-Netz mit einer Markierung M_0 an, sodass es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine von M_0 aus erreichbare Markierung gibt, die auf einer Stelle der Wert n annimmt.

Aufgabe 2 (Petri-Netze)
Gegeben seien die folgenden Petri-Netze:

1. N_1



2. N_2



1. Beschreiben Sie die markierten Netze jeweils als komplettes 3-Tupel und geben die Startmarkierung M_0 an.

2. Geben Sie Vor- und Nachbereiche der Transitionen t_1 und t_3 an.

3. Geben Sie jeweils an, ob es eine von M_0 ausgehende Schaltfolge gibt, bei der die Markierung einer Stelle des Netzes beliebig groß wird.

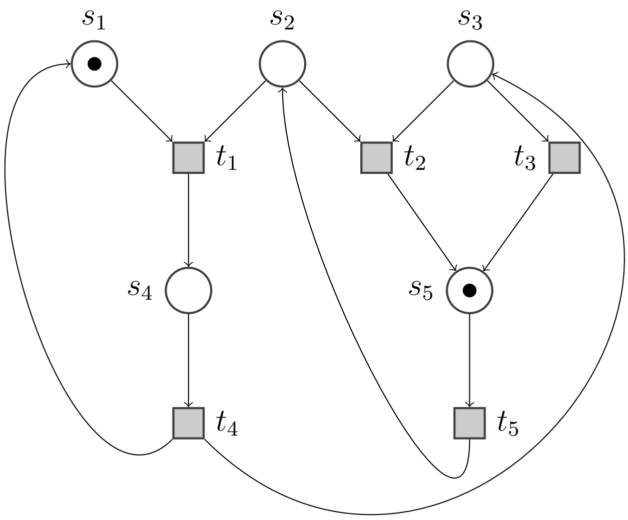
Aufgabe 3 (Petri-Netze)
Betrachten Sie die folgende informelle Vorschrift zur Konstruktion des *Markierungsgraphen* eines Petri-Netzes.

1. Berechne alle von der Startmarkierung M_0 aus erreichbaren Markierungen.

2. Lege für jede dieser Markierungen einen Knoten an.

3. Füge zwischen zwei Knoten M_i und M_j genau dann eine Kante von M_i zu M_j hinzu, wenn es eine Transition t gibt, die in M_i schalten kann, und durch deren Schaltung M_i in M_j überführt wird. Beschrifte diese Kante mit t.

Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit der eingezeichneten initalen Markierung M_0:



1. Geben Sie den Markierungsgraphen des Petri-Netzes an.

2. Gibt es für jede Transition t_i eine von M_0 aus erreichbare Markierung M_{t_i}, so dass t_i schalten kann?

3. Ist das Netz mit Startmarkierung M_0 sicher?

4. Ist das Netz mit Startmarkierung M_0 lebendig?

Aufgabe 4 (Wiederholung, Beweise)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Tribonacci-Zahl T_n als

$$T_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \{1,2,3\} \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$T_n < 2^n \; .$$

Aufgabe 5 (Wiederholung, Beweise)
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten. Zeigen Sie für alle $e \in E$:

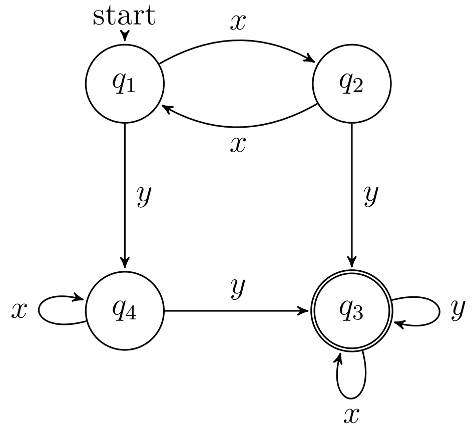
e ist eine Brückenkante[1] $\Leftrightarrow$ e ist in jedem Spannbaum von G enthalten.

Aufgabe 6 (Wiederholung, Beweise)
Betrachten Sie die folgende Definition der Mengen QN und QZ

$$QN = \{q \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n^2 = q\}$$
$$QZ = \{q \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : z^2 = q\} \; .$$

Beweisen Sie, dass $QN = QZ$.

Aufgabe 7 (Wiederholung, Reguläre Ausdrücke)
Gegeben sei der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{x, y\}$:



Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = L(A)$ an.

Aufgabe 8 (Wiederholung, Pumping-Lemma)
Gegeben ist die Sprache

$$L = \{1^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\} \; .$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.

[1] Siehe Präsenzübung 8, Aufgabe 5