

Modellierung – WS 2015/2016

Präsenzübung 5

23. - 27. November 2015

(Dieser Übungszettel besteht aus 5 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung “Musterlösungen“ zu verteilen.

Aufgabe 1 (Interpretation)

Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Interpretation \mathfrak{I} :

- $\omega = \mathbb{N}$
- $P^{(1)} \mapsto P_\omega = \{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 1 \pmod{2}\}$
- $Q^{(2)} \mapsto Q_\omega = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x + y) \equiv 0 \pmod{2}\}$

Außerdem ist die prädikatenlogische Formel

$$\alpha = \forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow Q(x, y))$$

gegeben.

Berechnen Sie die Interpretation $\mathfrak{I}(\alpha)$. Geben Sie in eigenen Worten an, welche Eigenschaften die prädikatenlogische Formel α unter der obigen Interpretation beschreibt.

Aufgabe 2 (Interpretationen)

Finden Sie für jede der folgenden prädikatenlogischen Formeln und der angegebenen umgangssprachlichen Bedeutung jeweils eine Interpretation, welche die Formel wahr werden lässt.

1. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
„Wenn eine Zahl echt größer als 6 ist, so ist sie auch echt größer als 5.“
Verwenden Sie den Grundbereich $\omega = \mathbb{N}$.
2. $\forall x \forall y \exists z (P(y, x) \rightarrow (Q(z, x) \wedge R(y, z) \vee S(z, x) \wedge R(y, z)))$
„Wenn ein Kind einen Onkel hat, dann haben Vater oder Mutter einen Bruder.“
Verwenden Sie die Menge aller Menschen als Grundbereich.

Aufgabe 3 (Interpretationen)

Bestimmen Sie für die folgende prädikatenlogische Formel α Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ über den natürlichen Zahlen \mathbb{N} , so dass $\mathfrak{I}_1(\alpha) = 0$ und $\mathfrak{I}_2(\alpha) = 1$ gilt.

$$\alpha = \forall x \forall y \forall z \forall u ((P(u, x) \wedge Q(x, y, z)) \rightarrow P(u, z))$$

Beweisen Sie, dass $\mathfrak{I}_1(\alpha) = 0$ und $\mathfrak{I}_2(\alpha) = 1$.

Aufgabe 4 (Interpretationen)

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = \forall x_1 \forall y_1 (P(c, x_1) \rightarrow \exists x_2 (P(c, x_2) \wedge \forall y_2 (P(g(y_1), y_2), x_2) \rightarrow P(g(f(y_1), f(y_2)), x_1))))$$

1. Geben Sie eine erfüllende Interpretation \mathfrak{S}_{rgb} über dem Grundbereich ω an, wobei $\omega = \{\text{Rot, Grün, Blau}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_{rgb}(\alpha) = 1$.
2. Sei die Interpretation \mathfrak{S} über dem Grundbereich $\omega = \mathbb{R}$ gegeben mit

- $\omega = \mathbb{R}$
- $P^{(2)} \mapsto \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < b\}$
- $c \mapsto 0$
- $g^{(2)} \mapsto g_\omega : \omega^2 \rightarrow \omega$ mit $g_\omega(x_\omega, y_\omega) = |x_\omega - y_\omega|$ für $x_\omega, y_\omega \in \omega$.
- $f^{(1)} \mapsto f_\omega : \omega \rightarrow \omega$ mit $f_\omega(x_\omega) = x_\omega$ für $x_\omega \in \omega$.

Wenden Sie \mathfrak{S} auf α an und prüfen Sie, ob es sich um eine erfüllende Interpretation handelt.

$$\alpha = \forall x_1 \forall y_1 \left(P(c, x_1) \rightarrow \exists x_2 (P(c, x_2) \wedge \forall y_2 (P(g(y_1), y_2), x_2) \rightarrow P(g(f(y_1), f(y_2)), x_1))) \right)$$

Aufgabe 5 (Normalformen)

Bringen Sie jede der folgenden prädikatenlogischen Formeln

- erst in Negations-Normalform (NNF),
- dann in die Pränexe Normalform (PNF) und
- zuletzt in Skolem Normalform (SKNF).

Geben Sie in jedem Zwischenschritt die benutzte Umformungsregel an.

1. $\neg \exists x (\forall y P(y) \vee \exists z Q(x, z))$
2. $\neg \exists y \forall x (\exists y (f(x) = y) \vee \exists x \forall y (P(x, y) \wedge \neg Q(f(y))))$

Beachten Sie, dass bei den gegebenen Formeln Variablen gleichen Namens an unterschiedliche Quantoren gebunden sein können.