

# Wurzelbäume

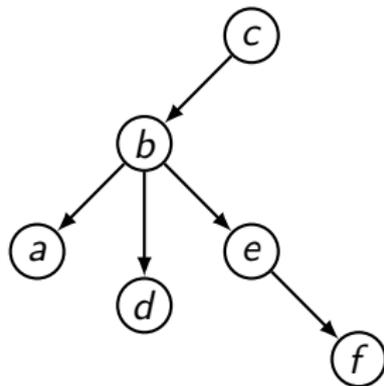
## Definition 1

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein gerichteter azyklischer Graph, in dem genau ein Knoten  $w$  Eingangsgrad 0 besitzt und alle anderen Knoten Eingangsgrad 1 besitzen. Knoten  $w$  heißt die Wurzel des Graphen.

# Wurzelbäume

## Definition 1

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein gerichteter azyklischer Graph, in dem genau ein Knoten  $w$  Eingangsgrad 0 besitzt und alle anderen Knoten Eingangsgrad 1 besitzen. Knoten  $w$  heißt die Wurzel des Graphen.



Wurzelbaum mit Wurzel  $c$

# Wurzelbäume

## Alternative Definition

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein Paar  $(T, w)$ , wobei  $T = (V, E)$  ein ungerichteter Baum ist und  $w \in V$  ein Knoten ist. Knoten  $w$  heißt die Wurzel des Graphen.

# Wurzelbäume

## Alternative Definition

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein Paar  $(T, w)$ , wobei  $T = (V, E)$  ein ungerichteter Baum ist und  $w \in V$  ein Knoten ist. Knoten  $w$  heißt die Wurzel des Graphen.

## Von ungerichtet zu gerichtet

- In  $T$  gibt es für jeden Knoten  $v \in V$  einen eindeutigen Pfad von  $w$  zu  $v$ .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten  $v \in V$  ein gerichteter Pfad von  $w$  zu  $v$  führt.

# Wurzelbäume

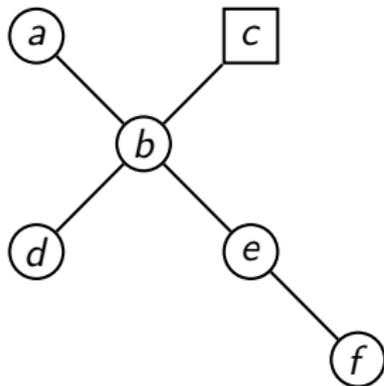
## Von ungerichtet zu gerichtet

- In  $T$  gibt es für jeden Knoten  $v \in V$  einen eindeutigen Pfad von  $w$  zu  $v$ .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten  $v \in V$  ein gerichteter Pfad von  $w$  zu  $v$  führt.

# Wurzelbäume

## Von ungerichtet zu gerichtet

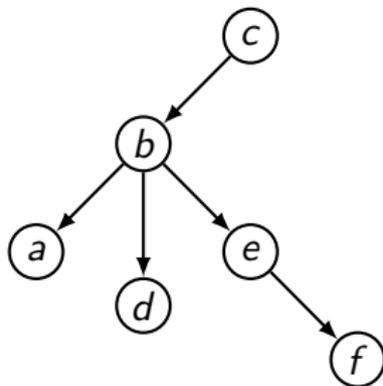
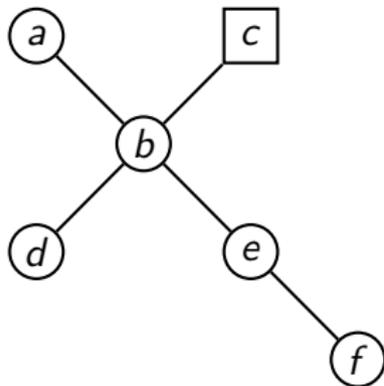
- In  $T$  gibt es für jeden Knoten  $v \in V$  einen eindeutigen Pfad von  $w$  zu  $v$ .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten  $v \in V$  ein gerichteter Pfad von  $w$  zu  $v$  führt.



# Wurzelbäume

## Von ungerichtet zu gerichtet

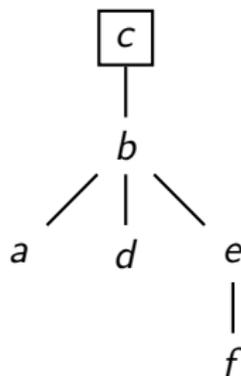
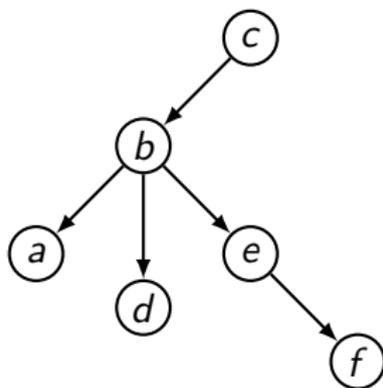
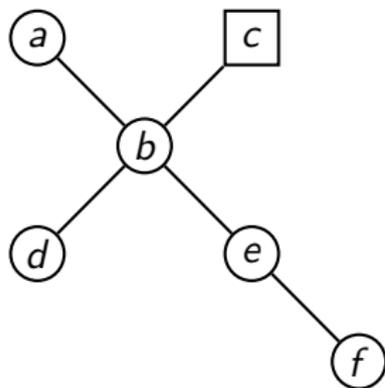
- In  $T$  gibt es für jeden Knoten  $v \in V$  einen eindeutigen Pfad von  $w$  zu  $v$ .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten  $v \in V$  ein gerichteter Pfad von  $w$  zu  $v$  führt.



# Wurzelbäume

## Von ungerichtet zu gerichtet

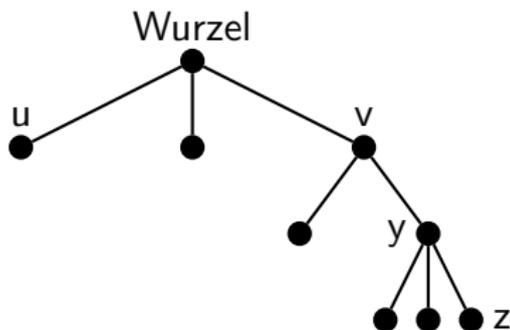
- In  $T$  gibt es für jeden Knoten  $v \in V$  einen eindeutigen Pfad von  $w$  zu  $v$ .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten  $v \in V$  ein gerichteter Pfad von  $w$  zu  $v$  führt.



# Grundlegende Begriffe

Sei  $(T, w)$ ,  $T = (V, E)$ , ein Wurzelbaum und  $v \in V$ .

- Die Knoten auf dem Pfad  $P$  von  $w$  zu  $v$  heißen **Vorgänger** von  $v$ .
- Der zu  $v$  benachbarte Knoten auf  $P$  heißt **unmittelbarer Vorgänger**, auch **Vater** oder **Elter**, von  $v$ .
- Knoten  $u$ , so dass  $v$  auf dem Pfad von  $w$  zu  $u$  liegt, heißen **Nachfolger** von  $v$ .
- Ein mit  $v$  durch eine Kante verbundener Nachfolger heißt **unmittelbarer Nachfolger**, auch **Sohn** oder **Kind** von  $v$ .



- $v$  ist Vorgänger von  $z$ .
- $v$  ist unmittelbarer Vorgänger von  $y$ .
- $u$  ist Nachfolger der Wurzel.
- $y$  ist unmittelbarer Nachfolger von  $v$ .

# Höhe von Bäumen

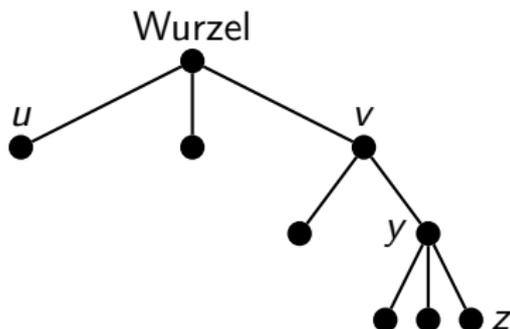
## Definition 2

Sei  $T = (V, E)$  ein Wurzelbaum und  $v \in V$  ein Knoten. Die Höhe von  $v$  ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in  $T$  mit Anfangsknoten  $v$ . Die Höhe von  $T$  ist die Höhe der Wurzel von  $T$ .

# Höhe von Bäumen

## Definition 2

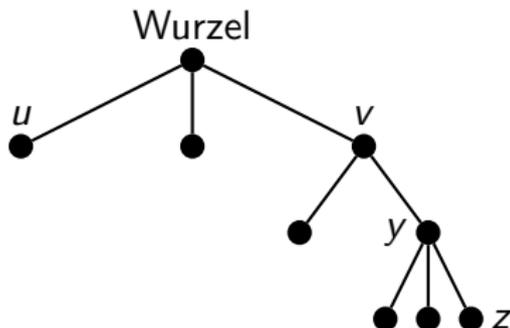
Sei  $T = (V, E)$  ein Wurzelbaum und  $v \in V$  ein Knoten. Die Höhe von  $v$  ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in  $T$  mit Anfangsknoten  $v$ . Die Höhe von  $T$  ist die Höhe der Wurzel von  $T$ .



# Höhe von Bäumen

## Definition 2

Sei  $T = (V, E)$  ein Wurzelbaum und  $v \in V$  ein Knoten. Die Höhe von  $v$  ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in  $T$  mit Anfangsknoten  $v$ . Die Höhe von  $T$  ist die Höhe der Wurzel von  $T$ .

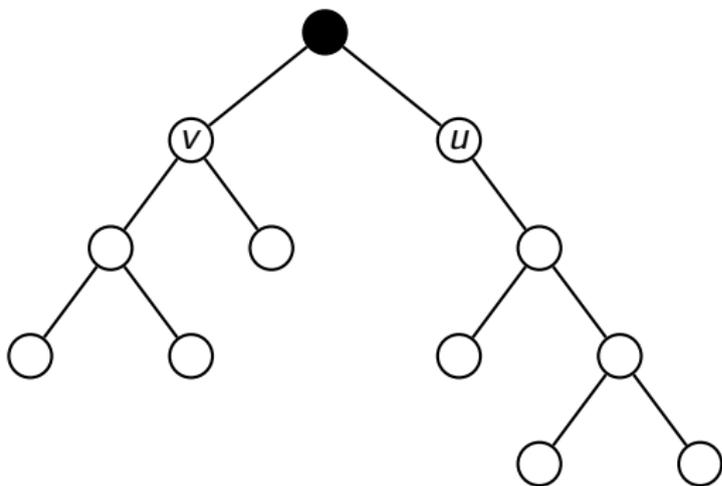


- $v$  hat Höhe 2.
- $u$  hat Höhe 0.
- Der Baum hat Höhe 3.

# Höhe von Bäumen

## Definition 2

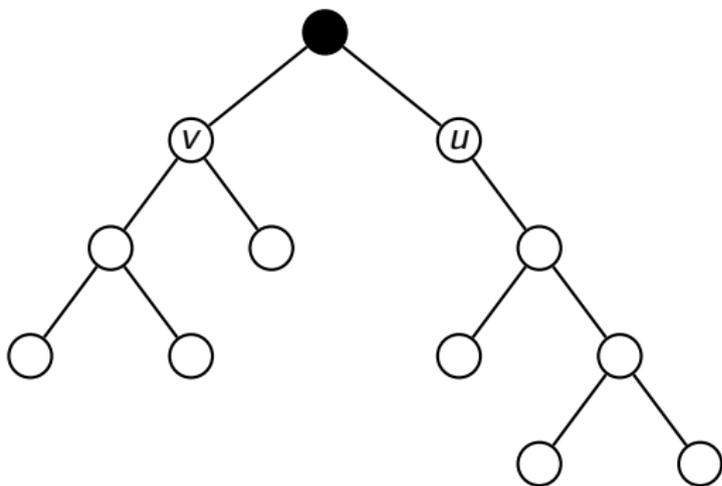
Sei  $T = (V, E)$  ein Wurzelbaum und  $v \in V$  ein Knoten. Die Höhe von  $v$  ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in  $T$  mit Anfangsknoten  $v$ . Die Höhe von  $T$  ist die Höhe der Wurzel von  $T$ .



# Höhe von Bäumen

## Definition 2

Sei  $T = (V, E)$  ein Wurzelbaum und  $v \in V$  ein Knoten. Die Höhe von  $v$  ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in  $T$  mit Anfangsknoten  $v$ . Die Höhe von  $T$  ist die Höhe der Wurzel von  $T$ .



- $v$  hat Höhe 2.
- $u$  hat Höhe 3.
- Der Baum hat Höhe 4.

## Definition 3

Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat.

Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem

- 1 jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau zwei unmittelbare Nachfolger hat
- 2 alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Einen Binärbaum, der nicht vollständig ist, nennen wir unvollständig.

# Binärbäume

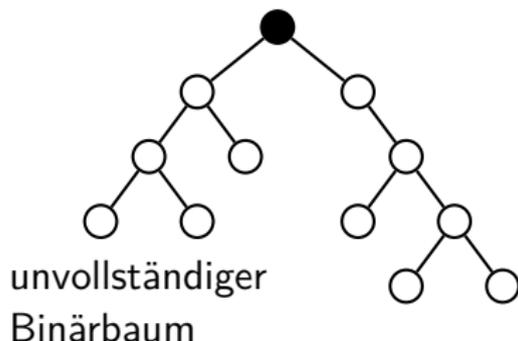
## Definition 3

Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat.

Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem

- 1 jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau zwei unmittelbare Nachfolger hat
- 2 alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Einen Binärbaum, der nicht vollständig ist, nennen wir unvollständig.



# Binäräume

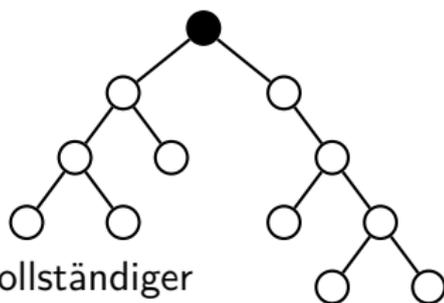
## Definition 3

Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat.

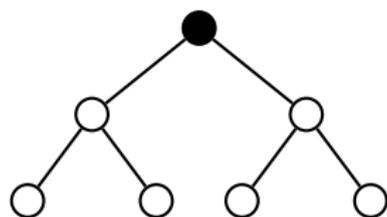
Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem

- 1 jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau zwei unmittelbare Nachfolger hat
- 2 alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Einen Binärbaum, der nicht vollständig ist, nennen wir unvollständig.



unvollständiger  
Binärbaum



vollständiger Binärbaum  
der Höhe 2

## Satz 4

*Ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $h$  hat  $2^h$  Blätter und  $2^{h+1} - 1$  Knoten.*

# Binärbäume

## Satz 4

*Ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $h$  hat  $2^h$  Blätter und  $2^{h+1} - 1$  Knoten.*

## Beweis

### Induktion über $h$

#### Induktionsanfang $h = 0$

- Baum der Höhe 0 besitzt
- $1 = 2^1 - 1$  Knoten
- $1 = 2^0$  Blätter

## Satz 4

*Ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $h$  hat  $2^h$  Blätter und  $2^{h+1} - 1$  Knoten.*

## Beweis

**Induktionsvoraussetzung** Satz korrekt für Knoten der Höhe  $\leq h$ .

**Induktionsschritt**  $h \rightarrow h + 1$

- $T$  vollständiger binärer Baum der Höhe  $h + 1$  und mit Wurzel  $w$
- $w$  Wurzel mit direkten Nachfolgern  $w_1$  und  $w_2$
- $w_i$  und seine Nachfolger sind vollständiger Baum  $T_i$  der Höhe  $h$ ,  $i = 1, 2$
- $T_i$  besitzt  $2^h$  Blätter und  $2^{h+1} - 1$  Knoten,  $i = 1, 2$
- Anzahl der Blätter von  $T$  ist Summe der Anzahl der Blätter von  $T_1$  und  $T_2$
- Anzahl der Blätter ist  $2^h + 2^h = 2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$

# Binärbäume

## Satz 4

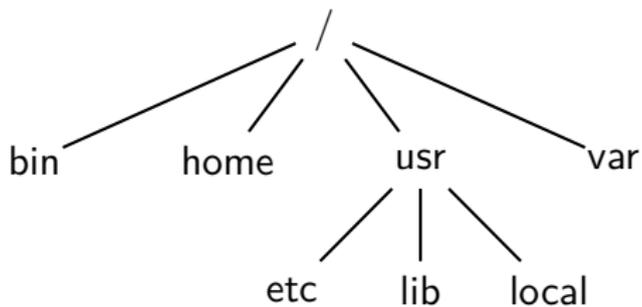
*Ein vollständiger Binärbaum der Höhe  $h$  hat  $2^h$  Blätter und  $2^{h+1} - 1$  Knoten.*

## Beweis

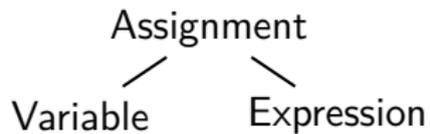
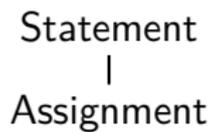
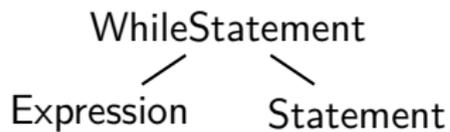
### Induktionsschritt $h \rightarrow h + 1$

- $T_i$  besitzt  $2^h$  Blätter und  $2^{h+1} - 1$  Knoten,  $i = 1, 2$
- Anzahl der Knoten von  $T$  ist Summe der Anzahl der Knoten von  $T_1$  und  $T_2$  plus 1 (für  $w$ ),
- Anzahl der Knoten ist
$$2^{h+1} - 1 + 2^{h+1} - 1 + 1 = 2 \cdot 2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$$

# Beschreibung von Strukturen - Dateisysteme



# Beschreibung von Strukturen - Programmkonstrukte





## Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

- Ein Handlungsreisender möchte auf einer Rundreise  $n$  Städte besuchen.
- Die Städte sind mit Straßen einer gewissen Länge verbunden. Manche Städte können von anderen Städten eventuell nicht direkt erreicht werden.
- Gesucht ist eine Tour minimaler Länge, die jede Stadt genau einmal besucht.

# Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

- Ein Handlungsreisender möchte auf einer Rundreise  $n$  Städte besuchen.
- Die Städte sind mit Straßen einer gewissen Länge verbunden. Manche Städte können von anderen Städten eventuell nicht direkt erreicht werden.
- Gesucht ist eine Tour minimaler Länge, die jede Stadt genau einmal besucht.

## Modellierung durch Graphen:

- Graph  $G = (V, E)$  mit Kantenmarkierung  $m : E \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

# Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

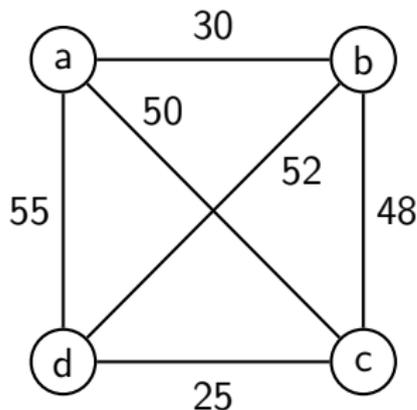
## Modellierung durch Graphen:

- Graph  $G = (V, E)$  mit Kantenmarkierung  $m : E \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

# Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

## Modellierung durch Graphen:

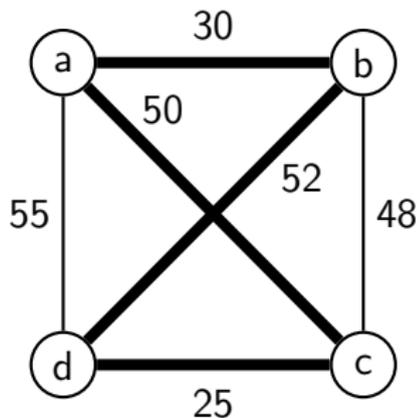
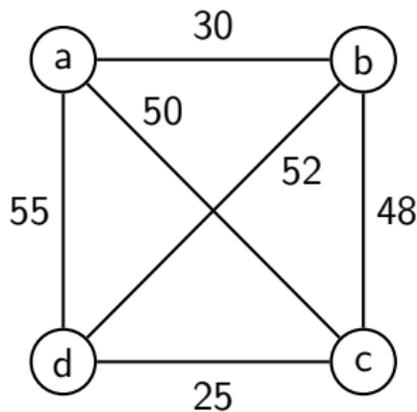
- Graph  $G = (V, E)$  mit Kantenmarkierung  $m : E \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.



# Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

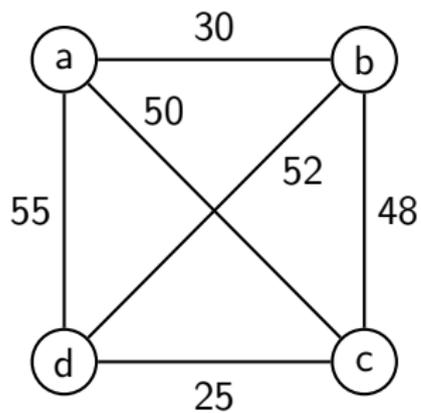
## Modellierung durch Graphen:

- Graph  $G = (V, E)$  mit Kantenmarkierung  $m : E \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

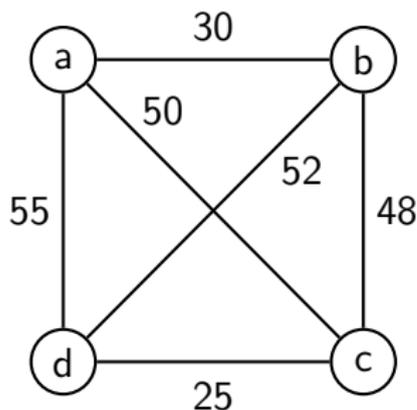


Kreis der  
Länge 157

# Entscheidungsbäume

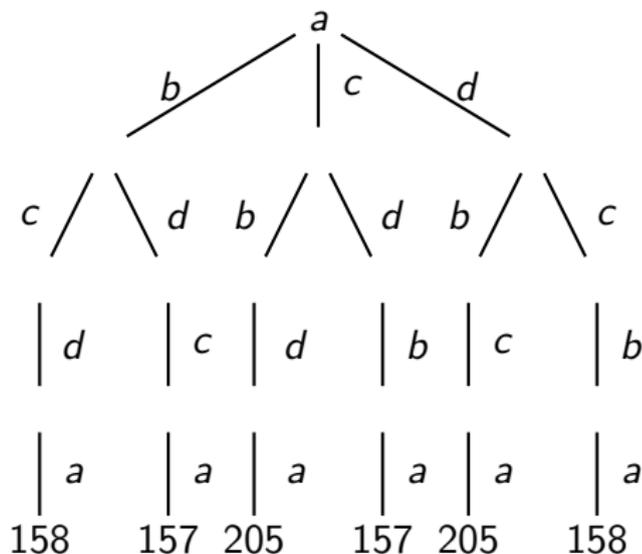
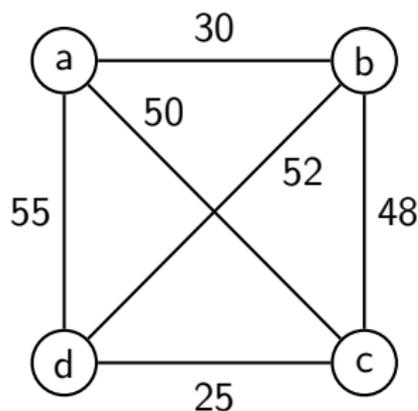


# Entscheidungsbäume



- Ein Entscheidungsbaum spannt alle potentielle Lösungen einer Aufgabe auf.
- Die Lösungen werden durch die Blätter charakterisiert.
- Der Pfad zu einem Blatt beschreibt die Entscheidungen, die zu diesem Blatt (Lösung) führen.

# Entscheidungsbaum



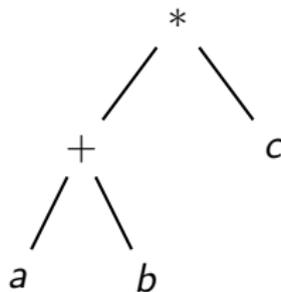
- Ein Entscheidungsbaum spannt alle potentielle Lösungen einer Aufgabe auf.
- Die Lösungen werden durch die Blätter charakterisiert.
- Der Pfad zu einem Blatt beschreibt die Entscheidungen, die zu diesem Blatt (Lösung) führen.

## Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- dienen zur Beschreibung der Struktur von arithmetischen Termen und Ausdrücken
- Knoten repräsentieren Variablen, Konstanten und Operatoren
- Kanten verbinden diese mit ihren Operanden

## Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

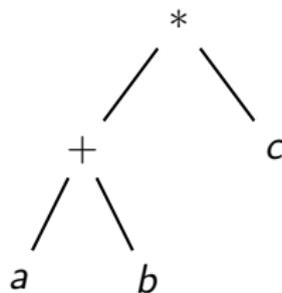
- dienen zur Beschreibung der Struktur von arithmetischen Termen und Ausdrücken
- Knoten repräsentieren Variablen, Konstanten und Operatoren
- Kanten verbinden diese mit ihren Operanden



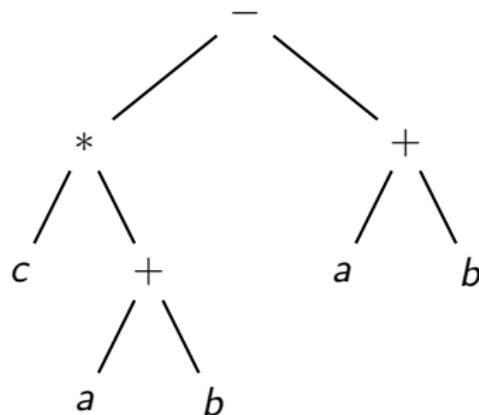
$$(a + b) * c$$

# Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- dienen zur Beschreibung der Struktur von arithmetischen Termen und Ausdrücken
- Knoten repräsentieren Variablen, Konstanten und Operatoren
- Kanten verbinden diese mit ihren Operanden



$$(a + b) * c$$



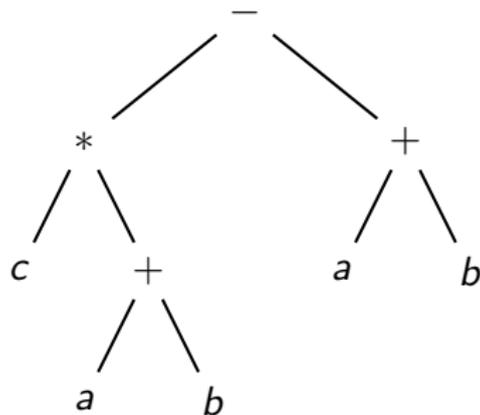
$$(a + b) * c - (a + b)$$

## Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- Taucht ein Teilausdruck zweimal auf, können die entsprechenden Knoten identifiziert werden.

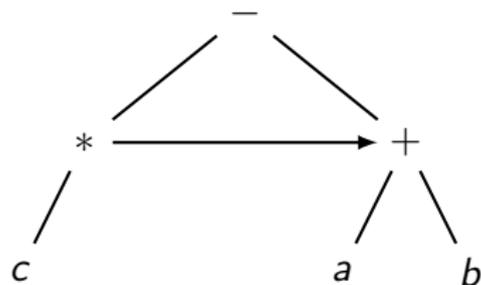
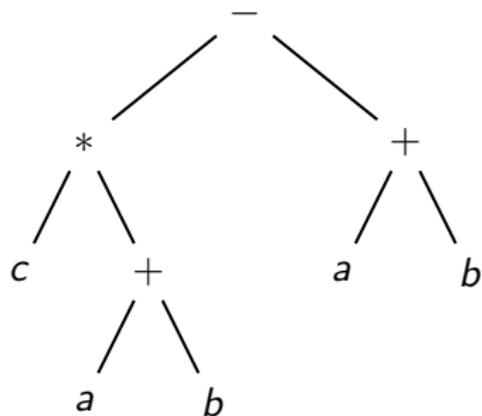
# Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- Taucht ein Teilausdruck zweimal auf, können die entsprechenden Knoten identifiziert werden.



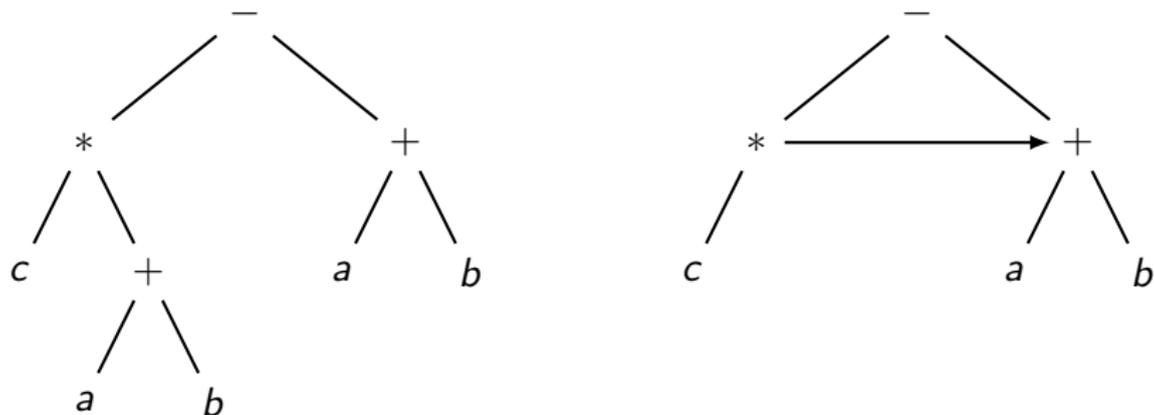
# Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- Taucht ein Teilausdruck zweimal auf, können die entsprechenden Knoten identifiziert werden.



## Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- Taucht ein Teilausdruck zweimal auf, können die entsprechenden Knoten identifiziert werden.



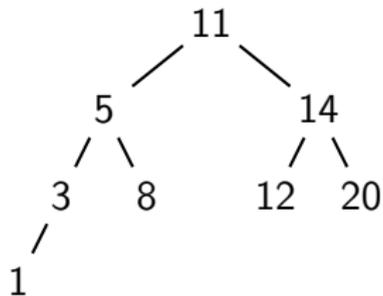
- Der Baum wird dadurch zu einem gerichteten, kreisfreien Graphen.
- Eingesetzt z.B. von Compilern, um Code zu erzeugen, der gleiche Teilausdrücke nur einmal auswertet.

# Suchbäume

- Binäre Bäume  $T = (V, E)$  mit  $V \subset \mathbb{N}$
- unterscheiden zwischen rechten und linken Nachfolgern
- für alle Knoten  $v$  gilt
  - ① alle rechten Nachfolger von  $v$  sind größer als  $v$
  - ② alle linken Nachfolger von  $v$  sind kleiner als  $v$

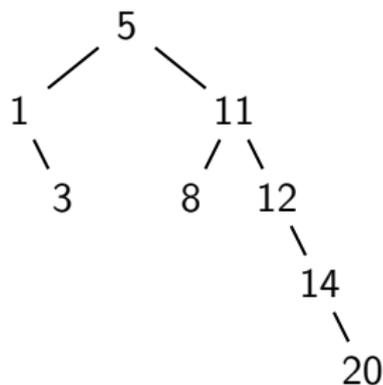
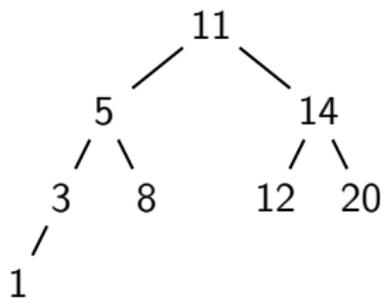
# Suchbäume

- Binäre Bäume  $T = (V, E)$  mit  $V \subset \mathbb{N}$
- unterscheiden zwischen rechten und linken Nachfolgern
- für alle Knoten  $v$  gilt
  - ① alle rechten Nachfolger von  $v$  sind größer als  $v$
  - ② alle linken Nachfolger von  $v$  sind kleiner als  $v$



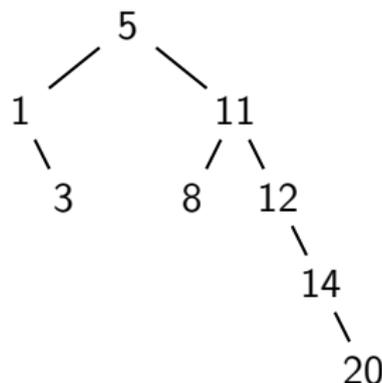
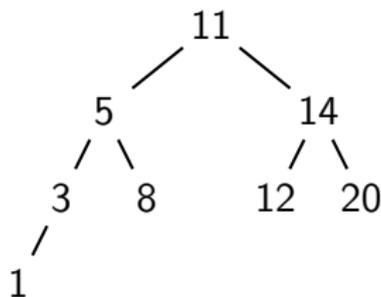
# Suchbäume

- Binäre Bäume  $T = (V, E)$  mit  $V \subset \mathbb{N}$
- unterscheiden zwischen rechten und linken Nachfolgern
- für alle Knoten  $v$  gilt
  - 1 alle rechten Nachfolger von  $v$  sind größer als  $v$
  - 2 alle linken Nachfolger von  $v$  sind kleiner als  $v$



# Suchbäume

- Binäre Bäume  $T = (V, E)$  mit  $V \subset \mathbb{N}$
- unterscheiden zwischen rechten und linken Nachfolgern
- für alle Knoten  $v$  gilt
  - 1 alle rechten Nachfolger von  $v$  sind größer als  $v$
  - 2 alle linken Nachfolger von  $v$  sind kleiner als  $v$



- gut geeignet, um Anfrage „ $x \in V?$ “ zu beantworten
- sollten möglichst balanciert sein

# Zusammenfassung Graphen

## Problemklassen

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- hierarchische Strukturen
- verzweigte Abläufe
- Anordnung in Folgen

# Zusammenfassung Graphen

## Problemklassen

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- hierarchische Strukturen
- verzweigte Abläufe
- Anordnung in Folgen

## Knoten- und Kantenbedeutung

- verbunden, benachbart, ....
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- besteht aus, enthält, ist-ein
- verzweigte Abläufe
- Relation

# Zusammenfassung Graphen

## Problemklassen

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- hierarchische Strukturen
- verzweigte Abläufe
- Anordnung in Folgen

## Knoten- und Kantenmarkierungen

- Entfernung, Kosten, Gewinn
- Färbung  $\doteq$  disjunkte Knotenmengen
- Symbole einer Sprache

## Knoten- und Kantenbedeutung

- verbunden, benachbart, ....
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- besteht aus, enthält, ist-ein
- verzweigte Abläufe
- Relation