

Endliche Automaten

Endliche Automaten

- sind ein Kalkül zur Spezifikation von realen oder abstrakten Maschinen
- reagieren auf äußere Ereignisse (=Eingaben)
- ändern ihren inneren Zustand
- produzieren gegebenenfalls eine Ausgabe
- werden in der Regel durch gerichtete, markierte Graphen dargestellt.

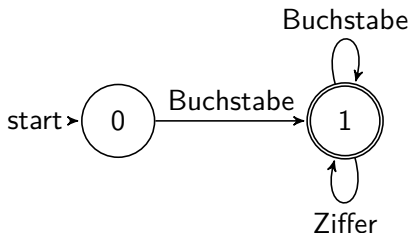
Endliche Automaten werden eingesetzt, um

- das Verhalten realer Maschinen (z.B. Ampelanlagen, Getränkeautomaten) zu spezifizieren
- das Verhalten von Softwarekomponenten (z.B. Benutzeroberflächen) zu spezifizieren
- einfache Sprachen (z.B. Bezeichner und Zahlen in Programmiersprache) zu spezifizieren.

Einführende Beispiele - Bezeichner in Programmiersprachen

Endliche Automaten und Sprachen

- Endlicher Automat definiert eine Sprache, d.h. Menge von Worten über einem Alphabet.

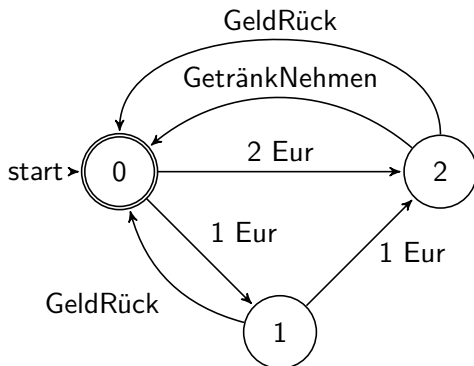


Beispiel: Automat akzeptiert jede Folge von Buchstaben und Ziffern, die mit einem Buchstaben beginnt.

Einführende Beispiele - Getränkeautomat

Endliche Automaten und Maschinen

- Endlicher Automat spezifiziert das Verhalten einer Maschine.



Beispiel: Automat akzeptiert Folgen von Ereignissen zur Bedienung eines Getränkeautomaten.

Deterministische endliche Automaten

Definition 1

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) (engl. deterministic finite automaton) A ist ein 5-Tupel $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von Zuständen ist,
- Σ ein endliches Alphabet ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die (partielle) Übergangsfunktion ist,
- q_0 der Startzustand ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge von Endzuständen (auch: akzeptierenden Zuständen) ist.

Erinnerung:

- Eine Funktion mit Definitionsbereich D und Bildbereich ist eine Relation $f \subseteq D \times B$ mit $((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$.
- f heißt **total**, falls zu jedem $x \in D$ ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.
Andernfalls heißt f **partiell**.

Deterministische endliche Automaten

Definition 1

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) (engl. deterministic finite automaton) A ist ein 5-Tupel $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von Zuständen ist,
 - Σ ein endliches Alphabet ist,
 - $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die (partielle) Übergangsfunktion ist,
 - q_0 der Startzustand ist,
 - $F \subseteq Q$ die Menge von Endzuständen (auch: akzeptierenden Zuständen) ist.
-
- Ist die Übergangsfunktion δ eines DFA total, so heißt A **vollständig**.
 - $r = \delta(q, a)$ heißt **Nachfolgezustand** von q unter a .
 - A heißt deterministisch, da es zu jedem Paar (q, a) , $q \in Q$, $a \in \Sigma$, höchstens einen Nachfolgezustand $\delta(q, a)$ gibt.

Beispiele

DFA A_1 definiert durch

$$Q = \{0, 1\}, q_0 = 0$$

$$\Sigma = \{\text{Buchstabe, Ziffer}\}$$

$$F = \{1\}$$

und Übergangsfunktion δ definiert durch

δ	Buchstabe	Ziffer
0	1	—
1	1	1

DFA A_2 definiert durch

$$Q = \{0, 1, 2\}, q_0 = 0$$

$$\Sigma = \{1 \text{ Eur, 2 Eur, GeldRück, GetränkNehmen}\}$$

$$F = \{0\}$$

und Übergangsfunktion δ definiert durch

δ	1 Eur	2 Eur	GR	GTN
0	1	2	—	—
1	2	—	0	—
2	—	—	0	0

Graphische Darstellung von DFAs

DFAs und Graphen

- pro Zustand ein Knoten, jeweils markiert mit Zustand, Startzustand und Endzustände gekennzeichnet
- Kante (q, r) markiert mit $a \in \Sigma$ genau dann, wenn $\delta(q, a) = r$
- erhalten Multigraphen, da Kanten sich nur durch Markierung unterscheiden können

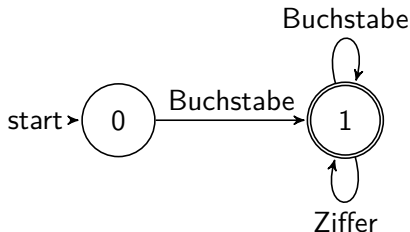
DFA A_1 :

$$Q = \{0, 1\}, q_0 = 0$$

$$\Sigma = \{\text{Buchstabe}, \text{Ziffer}\}$$

$$F = \{1\}$$

δ	Buchstabe	Ziffer
0	1	—
1	1	1



Graphische Darstellung von DFAs

DFAs und Graphen

- pro Zustand ein Knoten, jeweils markiert mit Zustand, Startzustand und Endzustände gekennzeichnet
- Kante (q, r) markiert mit $a \in \Sigma$ genau dann, wenn $\delta(q, a) = r$
- erhalten Multigraphen, da Kanten sich nur durch Markierung unterscheiden können

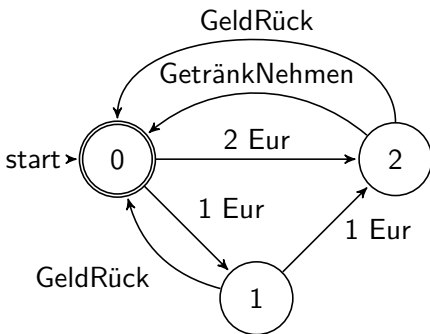
DFA A_2 :

$Q = \{0, 1, 2\}, q_0 = 0$

$\Sigma = \{1 \text{ Eur}, 2 \text{ Eur}, \text{GeldRück},$
 $\text{GetränkNehmen}\}$

$F = \{0\}$

δ	1 Eur	2 Eur	GR	GTN
0	1	2	—	—
1	2	—	0	—
2	—	—	0	0



Vervollständigung endlicher Automaten

Erinnerung: Ein DFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ heißt vollständig, wenn die Übergangsfunktion δ total ist.

Zum besseren Verständnis, zur Realisierung und zur formalen Argumentation kann es sinnvoll oder notwendig sein, einen DFA A so zu ergänzen, dass er vollständig ist.

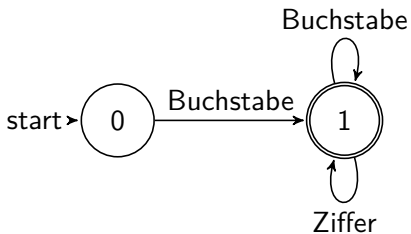
Ergänzung endlicher Automaten zu vollständigen Automaten

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Zur Ergänzung wird

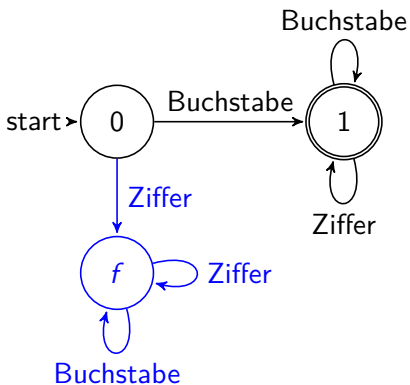
- 1 ein neuer Zustand f mit $f \notin F$ eingeführt,
- 2 für alle Paare $(q, a) \in Q \times \Sigma$, für die die Übergangsfunktion δ nicht definiert ist, $\delta(q, a) = f$ gesetzt,
- 3 für alle Paare $(f, a), a \in \Sigma$, $\delta(f, a) = f$ gesetzt.

Vervollständigung endlicher Automaten

DFA A_1 :

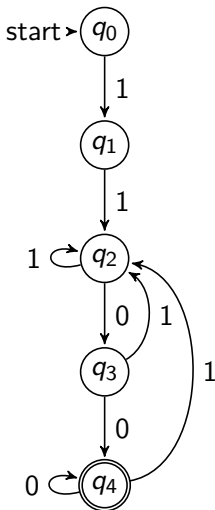


Vervollständigung von A_1 :

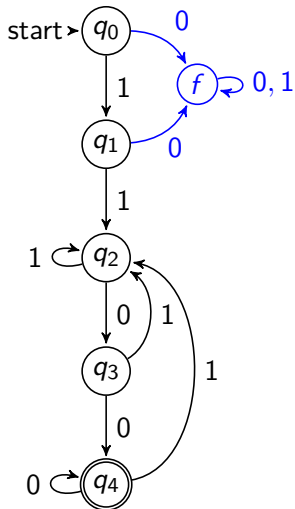


Vervollständigung endlicher Automaten

DFA A_3 :



Vervollständigung von A_3 :



Erweiterung von Übergangsfunktionen

Um das Verhalten eines DFAs $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ bei Folgen von Symbolen zu beschreiben, erweitern wir die Übergangsfunktion.

Definition 2

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ deterministischer endlicher Automat. Dann wird die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \epsilon) &= q \quad \text{für alle } q \in Q \text{ und das leere Wort } \epsilon \\ \hat{\delta}(q, wa) &= \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \quad \text{für alle } q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma.\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$ für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$

Bemerkungen:

- Wir unterscheiden häufig nicht zwischen δ und $\hat{\delta}$ und schreiben auch δ für die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$.

Erweiterung von Übergangsfunktionen

Definition 2

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ deterministischer endlicher Automat. Dann wird die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \epsilon) &= q \quad \text{für alle } q \in Q \text{ und das leere Wort } \epsilon \\ \hat{\delta}(q, wa) &= \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \quad \text{für alle } q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma.\end{aligned}$$

Alternative Formulierungen

Für $q, q' \in Q$ und $w = a_1 \cdots a_n, a_i \in \Sigma, i = 1, \dots, n$, gilt

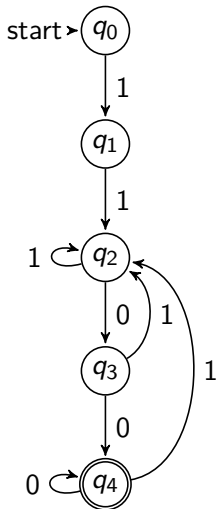
①
$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\dots \delta(\delta(q, a_1), a_2) \dots, a_n)$$

② $\hat{\delta}(q, w) = q'$ genau dann, wenn es $r_0, \dots, r_n \in Q$ gibt mit $r_0 = q, r_n = q'$ und

$$\delta(r_i, a_{i+1}) = r_{i+1} \quad \text{für } i = 0, \dots, n-1.$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

DFA A_3 :



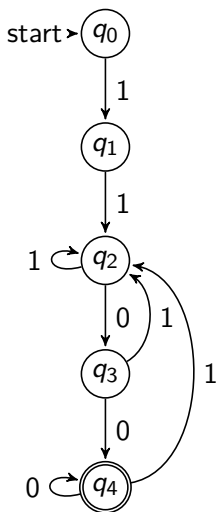
$$\begin{aligned}\delta(q_1, 110) &= \delta(\delta(q_1, 11), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_1, 1), 1), 0) \\ &= \delta(\delta(q_2, 1), 0) \\ &= \delta(q_2, 0) \\ &= q_3 \notin F\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$$r_0 = q_1, r_1 = q_2, r_2 = q_2, r_3 = q_3$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

DFA A_3 :



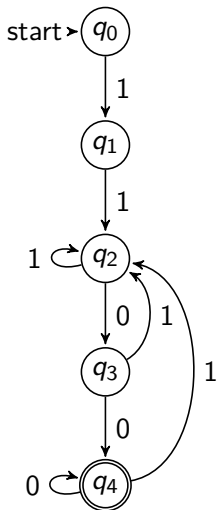
$$\begin{aligned}\delta(q_0, 11100) &= \delta(\delta(q_0, 1110), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_0, 111), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, 11), 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(q_0, 1), 1), 1), 0), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(q_1, 1), 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_2, 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(q_2, 0), 0) \\ &= \delta(q_3, 0) \\ &= q_4 \in F\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$$\begin{aligned}r_0 &= q_0, r_1 = q_1, r_2 = q_2, r_3 = q_2, r_4 = q_3 \\ r_5 &= q_4\end{aligned}$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

DFA A_3 :



$$\begin{aligned}\delta(q_0, 100) &= \delta(\delta(q_0, 10), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_0, 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(q_1, 0), 0) \\ &= -;\end{aligned}$$

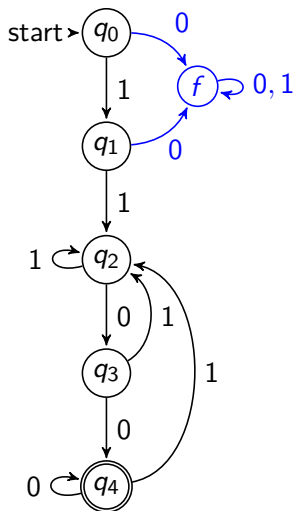
nicht definiert, da $\delta(q_1, 0)$
nicht definiert

Folge von Zuständen:

$r_0 = q_0, r_1 = q_1, r_2$ nicht definiert

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

Vervollständigter A_3 :



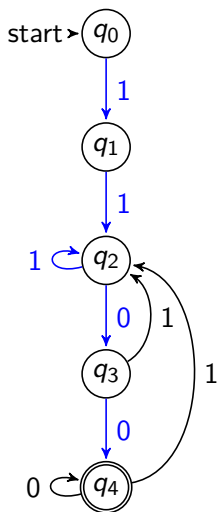
$$\begin{aligned}\delta(q_0, 100) &= \delta(\delta(q_0, 10), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_0, 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(q_1, 0), 0) \\ &= \delta(f, 0) \\ &= f\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$$r_0 = q_0, r_1 = q_1, r_2 = f, r_3 = f$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Berechnung als Weg

DFA A_3 :



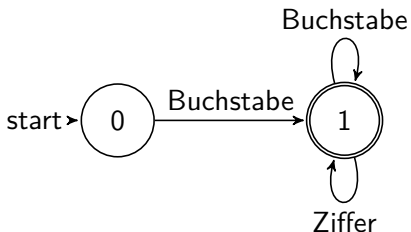
$$\begin{aligned}\delta(q_0, 11100) &= \delta(\delta(q_0, 1110), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_0, 111), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, 11), 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(q_0, 1), 1), 1), 0), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(q_1, 1), 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(q_2, 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(q_2, 0), 0) \\ &= \delta(q_3, 0) \\ &= q_4 \in F\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$$\begin{aligned}r_0 &= q_0, r_1 = q_1, r_2 = q_2, r_3 = q_2, r_4 = q_3 \\ r_5 &= q_4\end{aligned}$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

DFA A_1 :



B:= Buchstabe, Z:=Ziffer

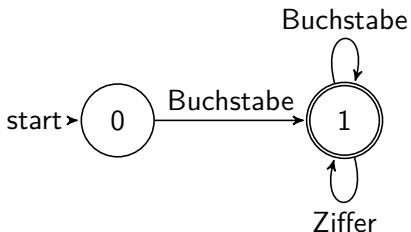
$$\begin{aligned}\delta(0, BZB) &= \delta(\delta(0, BZ), B) \\ &= \delta(\delta(\delta(0, B), Z), B) \\ &= \delta(\delta(1, Z), B) \\ &= \delta(1, B) \\ &= 1 \in F\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

DFA A_1 :



B:= Buchstabe, Z:=Ziffer

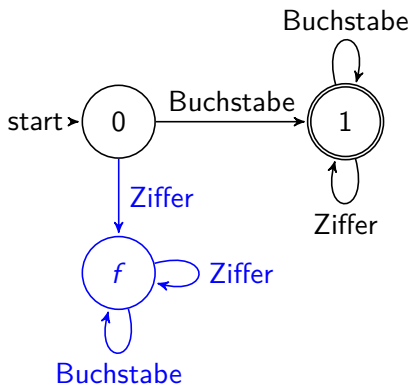
$$\begin{aligned}\delta(0, ZBB) &= \delta(\delta(0, ZB), B) \\ &= \delta(\delta(\delta(0, Z), B), B) \\ &= -; \\ &\text{nicht definiert, da } \delta(0, Z) \\ &\text{nicht definiert}\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$r_0 = 0$, r_1 nicht definiert

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiele

Vervollständigter A_1 :



B:= Buchstabe, Z:=Ziffer

$$\begin{aligned}\delta(0, ZBB) &= \delta(\delta(0, ZB), B) \\ &= \delta(\delta(\delta(0, Z), B), B) \\ &= \delta(\delta(f, B), B) \\ &= \delta(f, B) \\ &= f\end{aligned}$$

Folge von Zuständen:

$$r_0 = 0, r_1 = f, r_2 = f, r_3 = f$$

Automaten und Sprachen

Definition 3

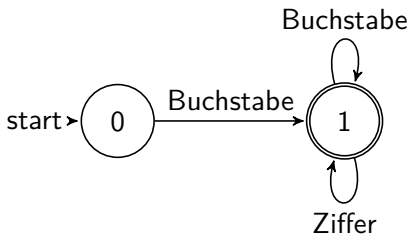
Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat.

- Der DFA A akzeptiert das Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $\delta(q_0, w) \in F$.
- Die Menge

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}$$

heißt die von A akzeptierte Sprache.

DFA A_1

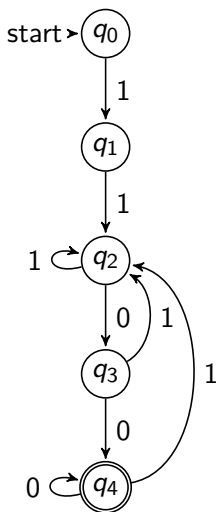


$B :=$ Buchstabe, $Z :=$ Ziffer

$$\begin{aligned} L(A_1) &= \{w \in \{B, Z\}^* \mid w \text{ beginnt} \\ &\quad \text{mit } B\} \\ &= L(B(B \mid Z)^*) \end{aligned}$$

Automaten und Sprachen

DFA A_3 :



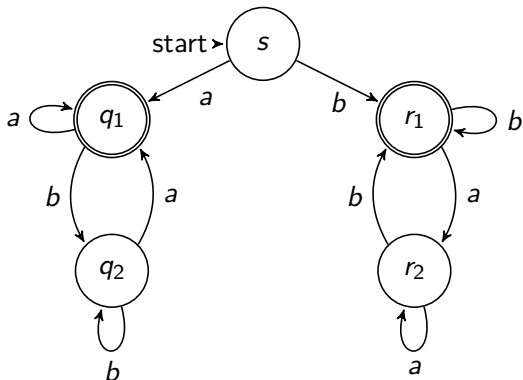
$L(A_3) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ beginnt mit } 11 \text{ und endet mit } 00\}$

$= L(1^2(0 \mid 1)^*0^2)$

(als regulärer Ausdruck)

Automaten und Sprachen

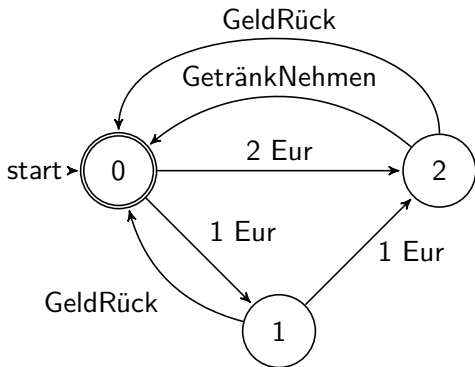
DFA A_4 :



$$L(A_4) = \{w \in \{a, b\}^+ \mid w \text{ beginnt und endet mit demselben Symbol}\}$$

Automaten und Sprachen

DFA A_2 :



$$L(A_2) = L \left(\left(\begin{array}{l} (1 \text{ Eur GeldRück}) \mid (1 \text{ Eur 1Eur GeldRück}) \mid \\ (1 \text{ Eur 1 Eur GetränkNehmen}) \mid (2 \text{ Eur GeldRück}) \mid \\ (2 \text{ Eur GetränkNehmen}) \end{array} \right)^* \right)$$

Satz 4

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

Endliche Automaten mit Ausgabe

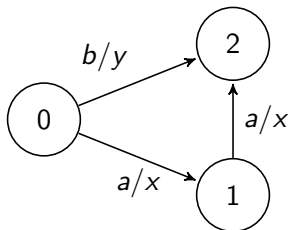
- Man kann mit endlichen Automaten auch Reaktionen der modellierten Maschine in Form von Ausgaben modellieren.
- Erweitern dazu Automaten um ein Ausgabealphabet T und eine Ausgabefunktion.
- Es gibt zwei Varianten:
 - ① Mealy-Automaten ordnen Zustandsübergängen eine Ausgabe zu.
 - ② Moore-Automaten ordnen Zuständen eine Ausgabe zu.

Mealy-Automaten

Definition 5

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein endlicher Automat, T ein endliches Alphabet und $\lambda : Q \times \Sigma \rightarrow T^*$ eine Funktion. Dann ist A erweitert um T und λ ein Mealy-Automat. T wird Ausgabealphabet und λ Ausgabefunktion genannt. Wir sagen, dass λ den Zustandsübergängen von A Ausgaben zuordnet.

Mealy-Automaten:



$$\lambda(0, b) = y, \lambda(0, a) = \lambda(1, a) = x$$

- Bildbereich von λ ist T^* , daher leeres Wort als Ausgabe möglich
- Automat muss nicht bei jedem Übergang mit einer Ausgabe reagieren

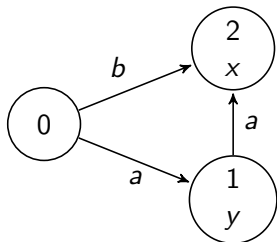
Endliche Automaten mit Ausgabe

Definition 6

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein endlicher Automat, T ein endliches Alphabet und $\mu : Q \rightarrow T^*$ eine Funktion. Dann ist A erweitert um T und μ ein Moore-Automat. T wird Ausgabealphabet und μ Ausgabefunktion genannt.

Wir sagen, dass μ den Zuständen von A Ausgaben zuordnet.

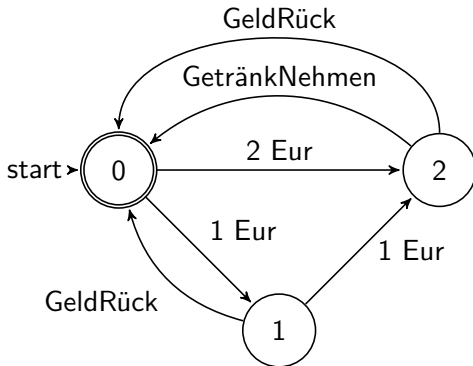
Moore-Automaten:



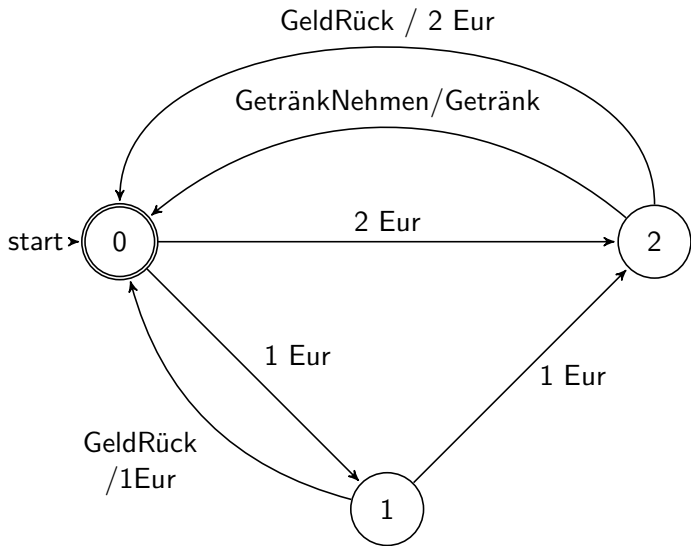
$$\mu(1) = y, \mu(2) = x$$

- Bildbereich von μ ist T^* , daher leeres Wort als Ausgabe möglich
- Automat muss nicht in jedem Zustand mit einer Ausgabe reagieren
- Moore-Automaten können Ausgaben nicht so fein differenzieren wie Mealy-Automaten

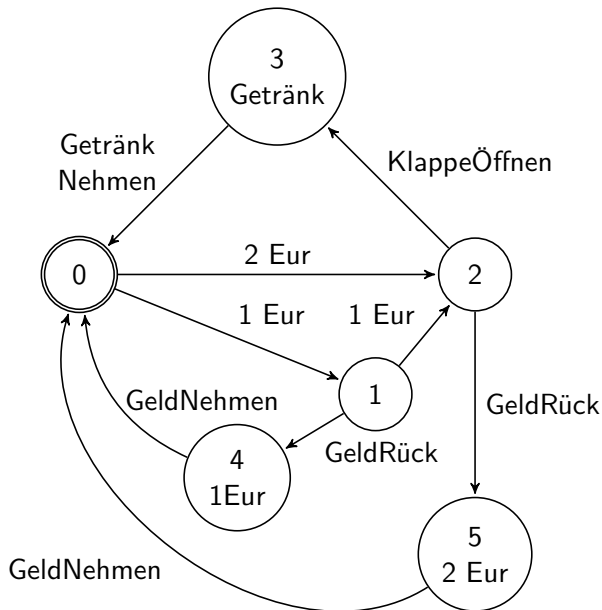
Getränkeautomat



Getränkeautomat mit Ausgabe - Mealy-Automat



Getränkeautomat mit Ausgabe - Moore-Automat



Vergleich Mealy- und Moore-Automaten

- In Mealy-Automaten können Übergänge, die zum selben Zustand führen, unterschiedliche Ausgaben erzeugen.
- ⇒ Moore-Automaten können Ausgaben nicht so fein differenzieren wie Mealy-Automaten.
- Aber jeder Mealy-Automat kann durch Einführung zusätzlicher Zustände in einen Moore-Automaten transformiert werden, der das gleiche Verhalten hat (siehe Beispiel Getränkeautomat)