

Petri-Netze

Petri-Netze sind ein formaler Kalkül zur Modellierung von

- Abläufen mit nebenläufigen Prozessen, die auf gemeinsame Ressourcen zugreifen
- kausalen Beziehungen

Petri-Netze

Petri-Netze sind ein formaler Kalkül zur Modellierung von

- Abläufen mit nebenläufigen Prozessen, die auf gemeinsame Ressourcen zugreifen
- kausalen Beziehungen

Mit Petri-Netzen werden beispielsweise

- reale oder abstrakte Automaten und Maschinen
- kommunizierende Prozesse (in Rechnern)
- Verhalten von Software- und Hardware-Komponenten
- Geschäftsabläufe
- Spiele nach gewissen Regeln

beschrieben und modelliert.

Petri-Netze

Petri-Netze sind ein formaler Kalkül zur Modellierung von

- Abläufen mit nebenläufigen Prozessen, die auf gemeinsame Ressourcen zugreifen
- kausalen Beziehungen

Mit Petri-Netzen werden beispielsweise

- reale oder abstrakte Automaten und Maschinen
- kommunizierende Prozesse (in Rechnern)
- Verhalten von Software- und Hardware-Komponenten
- Geschäftsabläufe
- Spiele nach gewissen Regeln

beschrieben und modelliert.

Petri-Netze können durch (gerichtete, markierte) bipartite Graphen dargestellt werden.

Petri-Netze - formale Definition

Definition 1

Ein Petri-Netz ist ein Tripel $P = (S, T, F)$, wobei

- 1 S eine endliche Menge von Stellen ist
- 2 T eine endliche Menge von Transitionen ist
- 3 $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ eine Relation ist.

Petri-Netze - formale Definition

Definition 1

Ein Petri-Netz ist ein Tripel $P = (S, T, F)$, wobei

- 1 S eine endliche Menge von Stellen ist
 - 2 T eine endliche Menge von Transitionen ist
 - 3 $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ eine Relation ist.
- Stellen $s \in S$ repräsentieren Bedingungen oder Zustände eines Systems.
 - Transitionen $t \in T$ repräsentieren Zustandsübergänge oder Aktivitäten eines Systems.

Graphische Darstellung von Petri-Netzen

Petri-Netze und gerichtete bipartite Graphen

Ein Petri-Netz $P = (S, T, F)$ kann folgendermaßen als gerichteter bipartiter Graph dargestellt werden.

- 1 Stellen $s \in S$ sind Knoten des Graphen, dargestellt durch Kreise,
- 2 Transitionen $t \in T$ sind Knoten des Graphen, dargestellt durch Rechtecke,
- 3 Kanten $f \in F$, $f = (s, t)$ oder $f = (t, s)$ mit $s \in S, t \in T$, entsprechen gerichteten Kanten des Graphen.

Graphische Darstellung - Beispiele

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), \\ (s_3, t_2), (s_4, t_3), (t_1, s_2), \\ (t_2, s_4)\}$$

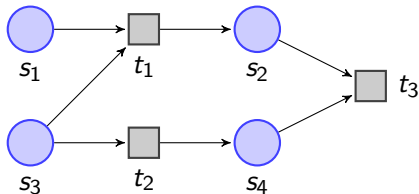
Graphische Darstellung - Beispiele

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), \\ (s_3, t_2), (s_4, t_3), (t_1, s_2), \\ (t_2, s_4)\}$$



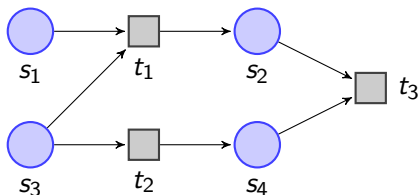
Graphische Darstellung - Beispiele

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), \\ (s_3, t_2), (s_4, t_3), (t_1, s_2), \\ (t_2, s_4)\}$$



Petri-Netz P_2 definiert durch

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \{a, b, c\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c), \\ (a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2)\}$$

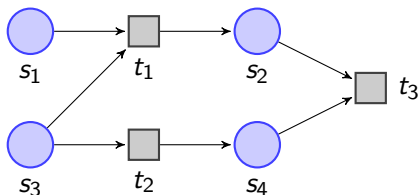
Graphische Darstellung - Beispiele

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), \\ (s_3, t_2), (s_4, t_3), (t_1, s_2), \\ (t_2, s_4)\}$$

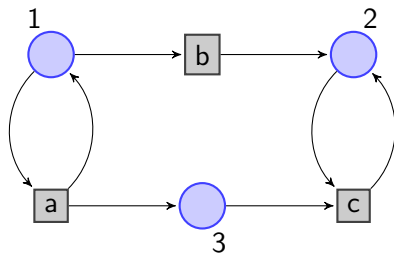


Petri-Netz P_2 definiert durch

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \{a, b, c\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c), \\ (a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2)\}$$



Graphische Darstellung - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), \\ (3, c), (4, d), (5, c) \\ (a, 2), (b, 3), (b, 1), \\ (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$

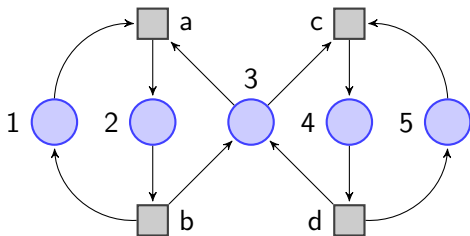
Graphische Darstellung - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, c), (4, d), (5, c), (a, 2), (b, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$



Markierte Petri-Netze

Definition 2

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Eine Funktion $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt Markierung des Petri-Netzes P . Das Petri-Netz P zusammen mit der Funktion M heißt markiertes Petri-Netz oder einfach Petri-Netz.

Markierte Petri-Netze

Definition 2

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Eine Funktion $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt Markierung des Petri-Netzes P . Das Petri-Netz P zusammen mit der Funktion M heißt markiertes Petri-Netz oder einfach Petri-Netz.

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), (s_3, t_2), \\ (s_4, t_3), (t_1, s_2), (t_2, s_4)\}$$

Markierung $M_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$M_1(s_1) = 2, M_1(s_4) = 1$$

$$M_1(s_2) = 0, M_1(s_3) = 0$$

Markierte Petri-Netze

Definition 2

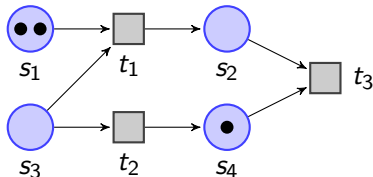
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Eine Funktion $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt Markierung des Petri-Netzes P . Das Petri-Netz P zusammen mit der Funktion M heißt markiertes Petri-Netz oder einfach Petri-Netz.

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), (s_3, t_2), \\ (s_4, t_3), (t_1, s_2), (t_2, s_4)\}$$



Markierung $M_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$M_1(s_1) = 2, M_1(s_4) = 1$$

$$M_1(s_2) = 0, M_1(s_3) = 0$$

Markierte Petri-Netze

Definition 2

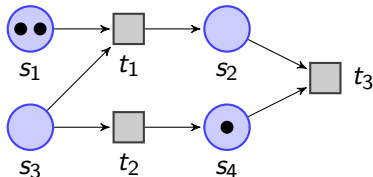
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Eine Funktion $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt Markierung des Petri-Netzes P . Das Petri-Netz P zusammen mit der Funktion M heißt markiertes Petri-Netz oder einfach Petri-Netz.

Petri-Netz P_1 definiert durch

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$F_1 = \{(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_2, t_3), (s_3, t_2), \\ (s_4, t_3), (t_1, s_2), (t_2, s_4)\}$$



Markierung $M_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$M_1(s_1) = 2, M_1(s_4) = 1$$

$$M_1(s_2) = 0, M_1(s_3) = 0$$

- Markierungen dargestellt durch Punkte in Stellen.
- Anzahl Punkte entspricht Funktionswert.

Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_2 definiert durch

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \{a, b, c\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), \\ (3, c)(a, 1), (a, 3), \\ (b, 2), (c, 2)\}$$

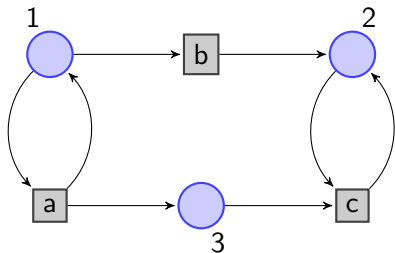
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_2 definiert durch

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \{a, b, c\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), \\ (3, c)(a, 1), (a, 3), \\ (b, 2), (c, 2)\}$$



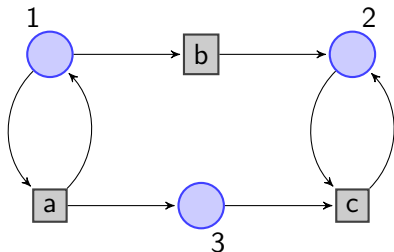
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_2 definiert durch

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \{a, b, c\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), \\ (3, c)(a, 1), (a, 3), \\ (b, 2), (c, 2)\}$$



Markierung $M_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$M_2(1) = 1, M_2(2) = 0$$

$$M_2(3) = 0$$

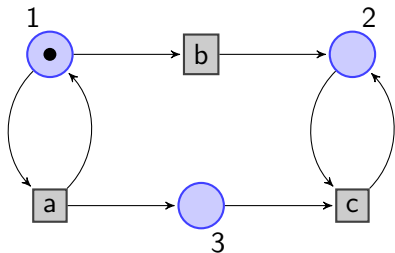
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_2 definiert durch

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \{a, b, c\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), \\ (3, c)(a, 1), (a, 3), \\ (b, 2), (c, 2)\}$$



Markierung $M_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$M_2(1) = 1, M_2(2) = 0$$

$$M_2(3) = 0$$

Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), \\ (3, c), (4, d), (5, c) \\ (a, 2), (b, 3), (b, 1), \\ (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$

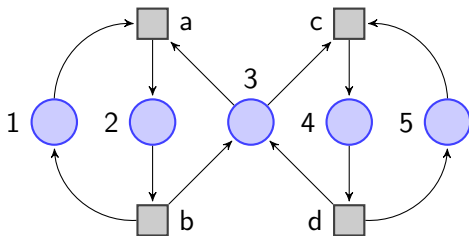
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, c), (4, d), (5, c), (a, 2), (b, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$



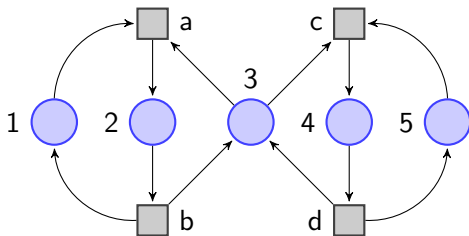
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), \\ (3, c), (4, d), (5, c) \\ (a, 2), (b, 3), (b, 1), \\ (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$



Markierung $M_3 : S_3 \rightarrow \mathbb{N}_0$
definiert durch

$$M_3(1) = 1, M_3(3) = 1$$

$$M_3(2) = M_3(4) = M_3(5) = 0$$

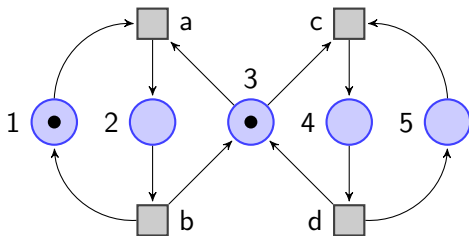
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), \\ (3, c), (4, d), (5, c) \\ (a, 2), (b, 3), (b, 1), \\ (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$



Markierung $M_3 : S_3 \rightarrow \mathbb{N}_0$
definiert durch

$$M_3(1) = 1, M_3(3) = 1$$

$$M_3(2) = M_3(4) = M_3(5) = 0$$

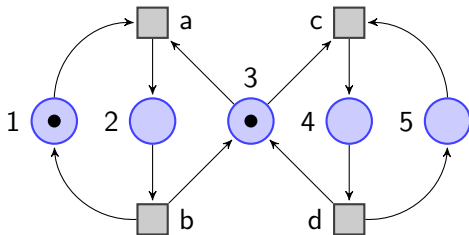
Markierte Petri-Netze - Beispiele

Petri-Netz P_3 definiert durch

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, c), (4, d), (5, c), (a, 2), (b, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 3), (d, 5)\}$$



Markierung $M_3 : S_3 \rightarrow \mathbb{N}_0$
definiert durch

$$M_3(1) = 1, M_3(3) = 1$$

$$M_3(2) = M_3(4) = M_3(5) = 0$$

- Markierungen können durch Folgen der Länge $|S|$ dargestellt werden.
- i -tes Element der Folge ist Wert von M an i -ter Stelle.
- Markierung M_3 von P_3 wird durch die Folge $(1, 0, 1, 0, 0)$ dargestellt.

Vor- und Nachbereiche in Petri-Netzen

Definition 3

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Für $t \in T$ definieren wir

$$\text{Vorbereich}(t) := \{s \in S \mid (s, t) \in F\}$$

$$\text{Nachbereich}(t) := \{s \in S \mid (t, s) \in F\}.$$

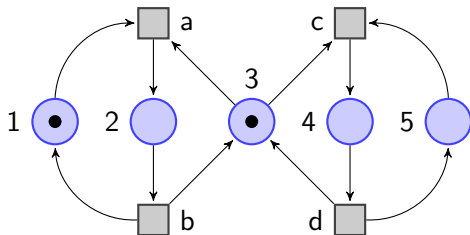
Vor- und Nachbereiche in Petri-Netzen

Definition 3

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Für $t \in T$ definieren wir

$$\text{Vorbereich}(t) := \{s \in S \mid (s, t) \in F\}$$

$$\text{Nachbereich}(t) := \{s \in S \mid (t, s) \in F\}.$$



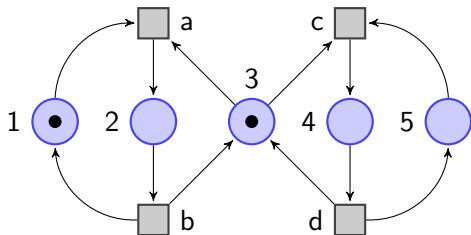
Vor- und Nachbereiche in Petri-Netzen

Definition 3

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Für $t \in T$ definieren wir

$$\text{Vorbereich}(t) := \{s \in S \mid (s, t) \in F\}$$

$$\text{Nachbereich}(t) := \{s \in S \mid (t, s) \in F\}.$$



$$\text{Vorbereich}(a) = \{1, 3\}$$

$$\text{Nachbereich}(a) = \{2\}$$

$$\text{Vorbereich}(b) = \{2\}$$

$$\text{Nachbereich}(b) = \{1, 3\}$$

$$\text{Vorbereich}(c) = \{3, 5\}$$

$$\text{Nachbereich}(c) = \{4\}$$

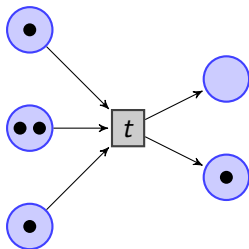
Vor- und Nachbereiche in Petri-Netzen

Definition 3

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Für $t \in T$ definieren wir

$$\text{Vorbereich}(t) := \{s \in S \mid (s, t) \in F\}$$

$$\text{Nachbereich}(t) := \{s \in S \mid (t, s) \in F\}.$$



Vorbereich(t) Nachbereich(t)

Schaltungen in Petri-Netzen

- **Schaltungen** eines Petri-Netzes überführen eine Markierung M des Petri-Netzes in eine Markierung M' .
- Schaltungen werden durch Transitionen des Petri-Netzes ausgeführt.
- Zu jedem Zeitpunkt wird nur eine Schaltung ausgeführt.
- Hintereinanderausführung mehrerer Schaltungen beschreibt die Dynamik oder Entwicklung des modellierten Systems.
- Dieses gilt auch für die Modellierung paralleler und nebenläufiger Systeme

Schaltungen in Petri-Netzen

Definition 4

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz, $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung von P und $t \in T$. Die Transition t kann schalten, wenn für alle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ gilt $M(s) \geq 1$. Die Schaltung von t führt zur Markierung M' definiert durch

$$M'(v) = M(v) - 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Vorbereich}(t) \setminus \text{Nachbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v) + 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Nachbereich}(t) \setminus \text{Vorbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v), \quad \text{für alle anderen Stellen } v \in S.$$

M' heißt Nachfolgemarkierung von M bei Transition t .

Schaltungen in Petri-Netzen

Definition 4

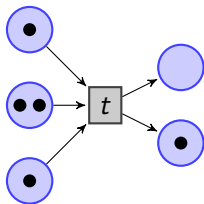
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz, $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung von P und $t \in T$. Die Transition t kann schalten, wenn für alle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ gilt $M(s) \geq 1$. Die Schaltung von t führt zur Markierung M' definiert durch

$$M'(v) = M(v) - 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Vorbereich}(t) \setminus \text{Nachbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v) + 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Nachbereich}(t) \setminus \text{Vorbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v), \quad \text{für alle anderen Stellen } v \in S.$$

M' heißt Nachfolgemarkierung von M bei Transition t .



Schaltungen in Petri-Netzen

Definition 4

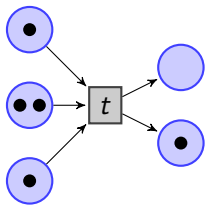
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz, $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung von P und $t \in T$. Die Transition t kann schalten, wenn für alle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ gilt $M(s) \geq 1$. Die Schaltung von t führt zur Markierung M' definiert durch

$$M'(v) = M(v) - 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Vorbereich}(t) \setminus \text{Nachbereich}(t)$$

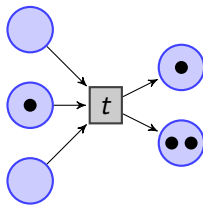
$$M'(v) = M(v) + 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Nachbereich}(t) \setminus \text{Vorbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v), \quad \text{für alle anderen Stellen } v \in S.$$

M' heißt Nachfolgemarkierung von M bei Transition t .



Schaltung an t
→



Schaltungen in Petri-Netzen

Definition 4

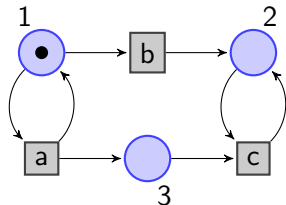
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz, $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung von P und $t \in T$. Die Transition t kann schalten, wenn für alle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ gilt $M(s) \geq 1$. Die Schaltung von t führt zur Markierung M' definiert durch

$$M'(v) = M(v) - 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Vorbereich}(t) \setminus \text{Nachbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v) + 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Nachbereich}(t) \setminus \text{Vorbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v), \quad \text{für alle anderen Stellen } v \in S.$$

M' heißt Nachfolgemarkierung von M bei Transition t .



Schaltungen in Petri-Netzen

Definition 4

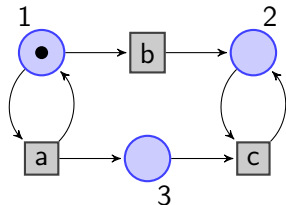
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz, $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung von P und $t \in T$. Die Transition t kann schalten, wenn für alle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ gilt $M(s) \geq 1$. Die Schaltung von t führt zur Markierung M' definiert durch

$$M'(v) = M(v) - 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Vorbereich}(t) \setminus \text{Nachbereich}(t)$$

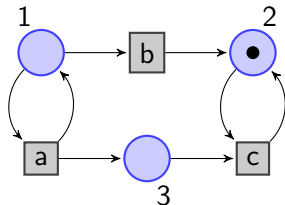
$$M'(v) = M(v) + 1, \quad \text{für alle } v \in \text{Nachbereich}(t) \setminus \text{Vorbereich}(t)$$

$$M'(v) = M(v), \quad \text{für alle anderen Stellen } v \in S.$$

M' heißt Nachfolgemarkierung von M bei Transition t .



Schaltung an b



Folgen von Schaltungen

- Schaltungen können sukzessive ausgeführt werden → Folgen von Schaltungen
- trotzdem können Petri-Netze zur Modellierung paralleler und nebenläufiger Systeme eingesetzt werden

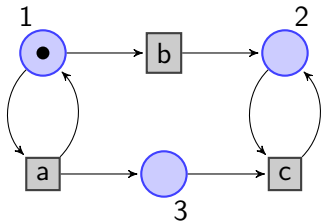
Folgen von Schaltungen

- Schaltungen können sukzessive ausgeführt werden → Folgen von Schaltungen
- trotzdem können Petri-Netze zur Modellierung paralleler und nebenläufiger Systeme eingesetzt werden

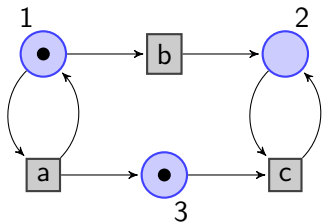
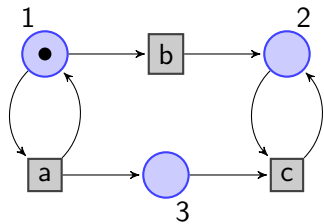
Folgen von Schaltungen oder **Schaltfolgen** können dargestellt werden als

- Folge von Markierungen
- Folgen der geschalteten Transitionen

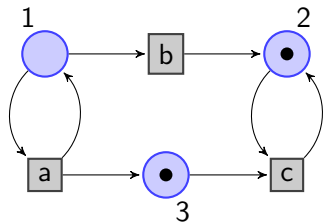
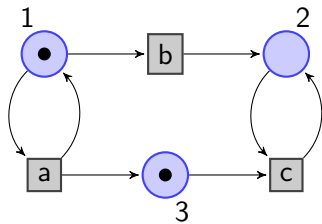
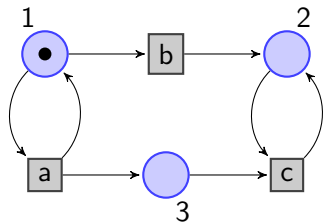
Folgen von Schaltungen



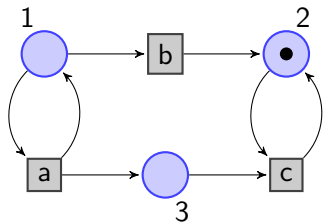
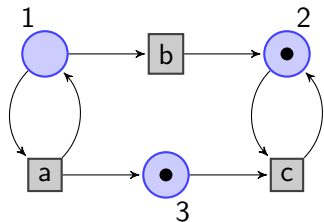
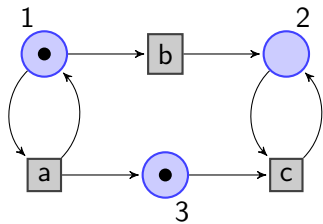
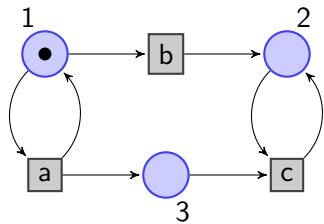
Folgen von Schaltungen



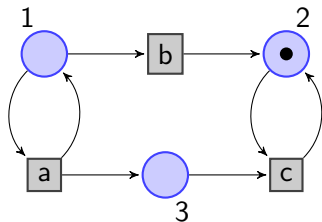
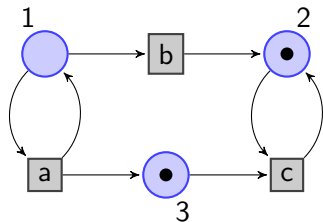
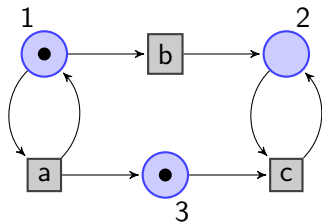
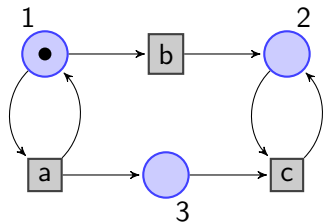
Folgen von Schaltungen



Folgen von Schaltungen



Folgen von Schaltungen

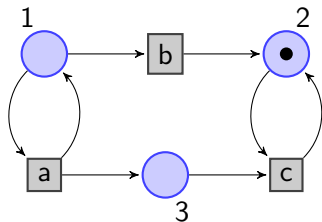
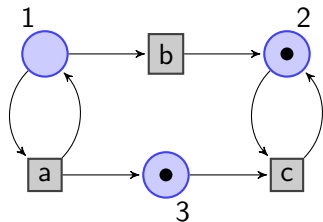
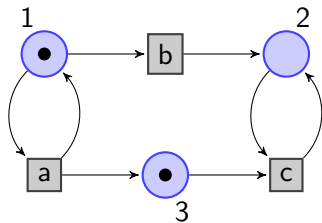
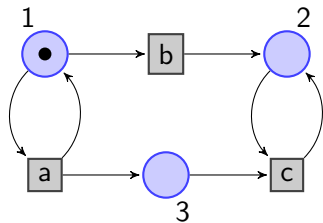


Folge von Markierungen:

$$M_0 = (1, 0, 0) \quad M_1 = (1, 0, 1)$$

$$M_2 = (0, 1, 1) \quad M_3 = (0, 1, 0)$$

Folgen von Schaltungen



Folge von Markierungen:

$$M_0 = (1, 0, 0)$$

$$M_1 = (1, 0, 1)$$

$$M_2 = (0, 1, 1)$$

$$M_3 = (0, 1, 0)$$

Folge von Transitionen

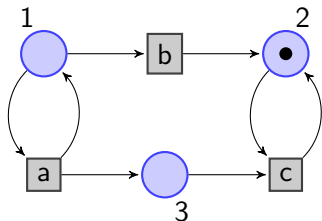
a, b, c

Blockierte Petri-Netze und erreichbare Markierungen

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.

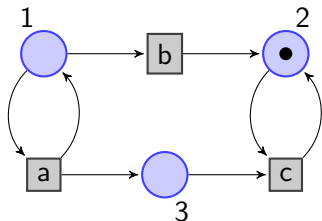
Blockierte Petri-Netze und erreichbare Markierungen

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.



Blockierte Petri-Netze und erreichbare Markierungen

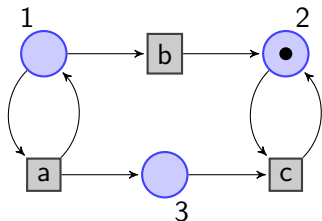
- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.



Petri-Netz ist blockiert

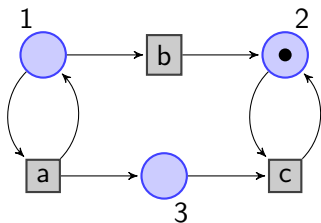
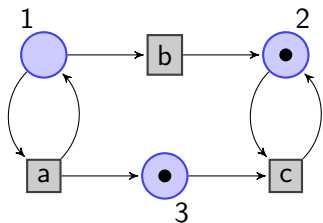
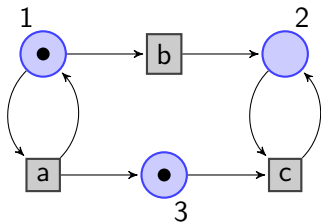
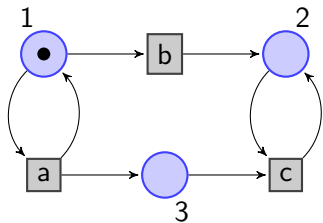
Blockierte Petri-Netze und erreichbare Markierungen

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.
- $M' : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ Markierung von P .
- Existieren Markierungen $M_0 = M, M_1, \dots, M_n = M'$, wobei M_{i+1} Nachfolgemarkierung von M_i ist, so sagen wir, dass M' von M erreichbar ist.



Petri-Netz ist blockiert

Erreichbare Markierungen

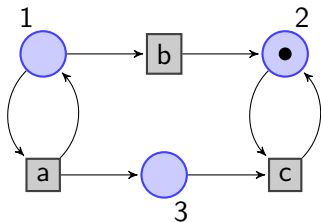
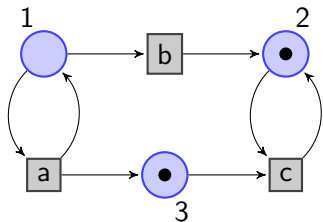
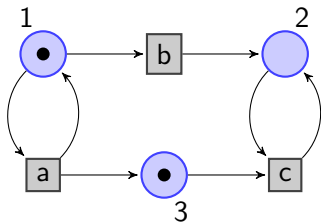
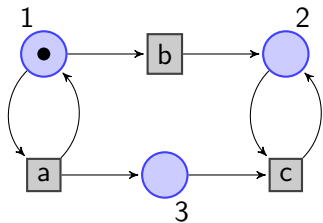


Folge von Markierungen:

$$M_0 = (1, 0, 0) \quad M_1 = (1, 0, 1)$$

$$M_2 = (0, 1, 1) \quad M_3 = (0, 1, 0)$$

Erreichbare Markierungen



Folge von Markierungen:

$$M_0 = (1, 0, 0)$$

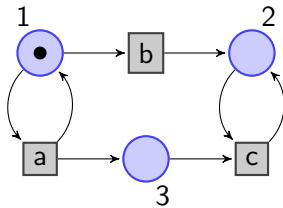
$$M_1 = (1, 0, 1)$$

$$M_2 = (0, 1, 1)$$

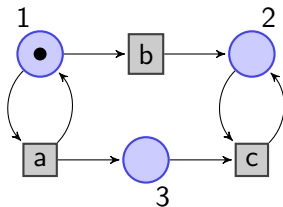
$$M_3 = (0, 1, 0)$$

M_1, M_2, M_3 sind von M_0 erreichbar.

Konflikte zwischen Transitionen

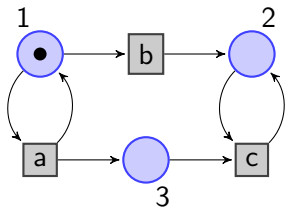


Konflikte zwischen Transitionen



- Transitionen a und b können nicht gleichzeitig schalten,
- obwohl $M(v) \geq 1$ für alle $v \in \text{Vorbereich}(a) \cup \text{Vorbereich}(b)$.

Konflikte zwischen Transitionen



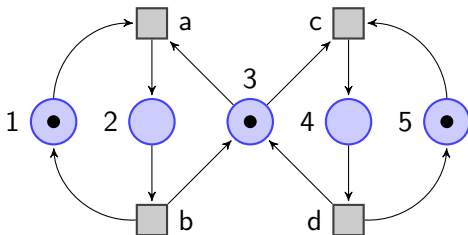
- Transitionen a und b können nicht gleichzeitig schalten,
- obwohl $M(v) \geq 1$ für alle $v \in \text{Vorbereich}(a) \cup \text{Vorbereich}(b)$.

Definition 5

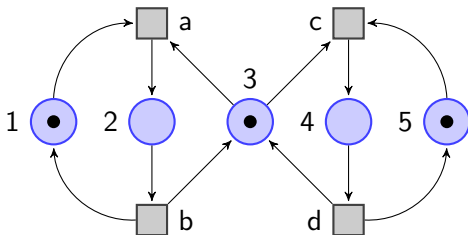
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz. Transitionen $t, t' \in T$ stehen in Konflikt, wenn

$$\text{Vorbereich}(t) \cap \text{Vorbereich}(t') \neq \emptyset.$$

Konflikte zwischen Transitionen

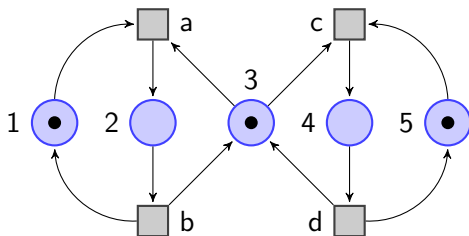


Konflikte zwischen Transitionen



- Transitionen a und c stehen in Konflikt.
- Transitionen b und d stehen nicht in Konflikt.

Konflikte zwischen Transitionen



- Transitionen a und c stehen in Konflikt.
- Transitionen b und d stehen nicht in Konflikt.

Konflikte und Schaltfolgen

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz mit Markierung $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ und seien $t, t' \in T$. Stehen t, t' nicht in Konflikt und können sowohl t als auch t' schalten, dann kann t' in der Nachfolgemarkierung M' von M bei Transition t schalten.

Definition 6

Sei $P = (S, T, N)$ ein Petri-Netz mit (Anfangs-) Markierung M_0 . Wir nennen

$$L(P) := \{w \in T^* \mid w \text{ ist eine mögliche Folge von Schaltungen von } P \text{ mit Markierung } M_0\}$$

die durch P definierte Sprache.

Petri-Netze und Sprachen

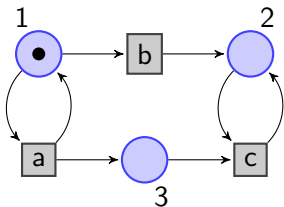
Definition 6

Sei $P = (S, T, N)$ ein Petri-Netz mit (Anfangs-) Markierung M_0 . Wir nennen

$$L(P) := \{w \in T^* \mid w \text{ ist eine mögliche Folge von Schaltungen von } P \text{ mit Markierung } M_0\}$$

die durch P definierte Sprache.

Petri-Netz P_2



Petri-Netze und Sprachen

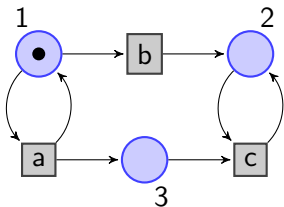
Definition 6

Sei $P = (S, T, N)$ ein Petri-Netz mit (Anfangs-) Markierung M_0 . Wir nennen

$$L(P) := \{w \in T^* \mid w \text{ ist eine mögliche Folge von Schaltungen von } P \text{ mit Markierung } M_0\}$$

die durch P definierte Sprache.

Petri-Netz P_2



$$L(P_2) = \{a^n bc^m \mid m \leq n, n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Petri-Netze und Sprachen

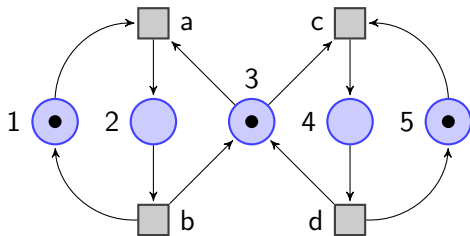
Definition 6

Sei $P = (S, T, N)$ ein Petri-Netz mit (Anfangs-) Markierung M_0 . Wir nennen

$$L(P) := \{w \in T^* \mid w \text{ ist eine mögliche Folge von Schaltungen von } P \text{ mit Markierung } M_0\}$$

die durch P definierte Sprache.

Petri-Netz P_3



Petri-Netze und Sprachen

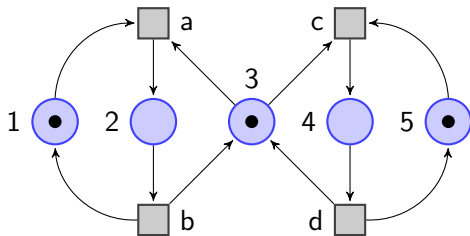
Definition 6

Sei $P = (S, T, N)$ ein Petri-Netz mit (Anfangs-) Markierung M_0 . Wir nennen

$$L(P) := \{w \in T^* \mid w \text{ ist eine mögliche Folge von Schaltungen von } P \text{ mit Markierung } M_0\}$$

die durch P definierte Sprache.

Petri-Netz P_3



$$L(P_3) = L((ab \mid cd)^*)$$

Modellierung mit Petri-Netzen - Programmabläufe

- Transitionen entsprechen Programminstruktionen
- Stellen entsprechen Bedingungen für die Ausführung einer Instruktion

Modellierung mit Petri-Netzen - Programmabläufe

- Transitionen entsprechen Programminstruktionen
- Stellen entsprechen Bedingungen für die Ausführung einer Instruktion

$$A = 1$$

$$B = 2$$

$$C = 3$$

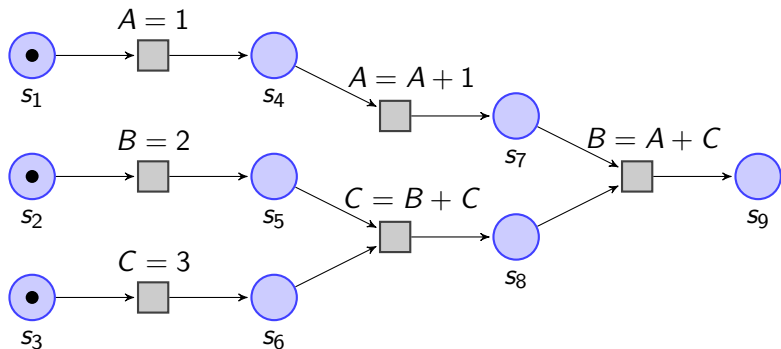
$$A = A + 1$$

$$C = B + C$$

$$B = A + C$$

Modellierung mit Petri-Netzen - Programmabläufe

- Transitionen entsprechen Programminstruktionen
- Stellen entsprechen Bedingungen für die Ausführung einer Instruktion

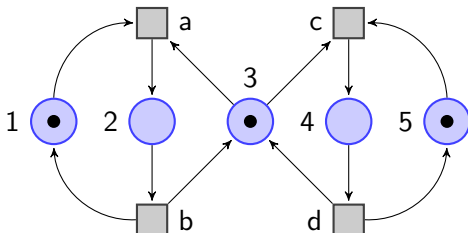


Modellierung mit Petri-Netzen - zyklische Prozesse

- zwei Prozesse P_1, P_2 sollen immer wieder und in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden
- die Prozesse greifen jedoch auf eine gemeinsame Ressource zu
- daher kann zu jedem Zeitpunkt immer nur einer der Prozesse ausgeführt werden

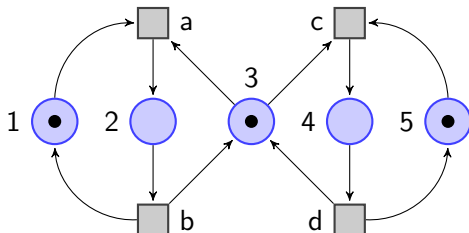
Modellierung mit Petri-Netzen - zyklische Prozesse

- zwei Prozesse P_1, P_2 sollen immer wieder und in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden
- die Prozesse greifen jedoch auf eine gemeinsame Ressource zu
- daher kann zu jedem Zeitpunkt immer nur einer der Prozesse ausgeführt werden



Modellierung mit Petri-Netzen - zyklische Prozesse

- zwei Prozesse P_1, P_2 sollen immer wieder und in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden
- die Prozesse greifen jedoch auf eine gemeinsame Ressource zu
- daher kann zu jedem Zeitpunkt immer nur einer der Prozesse ausgeführt werden



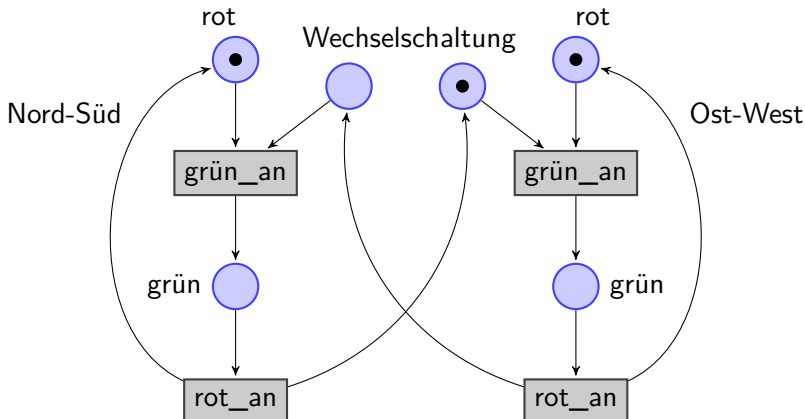
- Transitionen a, b modellieren Prozess P_1
- Transitionen c, d modellieren Prozess P_2

Modellierung mit Petri-Netzen - Ampelschaltung

- Ampelschaltung an der Kreuzung zweier Straßen (Ost-West, Nord-Süd)
- zu jedem Zeitpunkt hat eine Straße „grün“, die andere „rot“
- die Grün-Phasen und Rot-Phasen der beiden Straßen wechseln sich ab
- ignorieren zur Vereinfachung die Gelb-Phase

Modellierung mit Petri-Netzen - Ampelschaltung

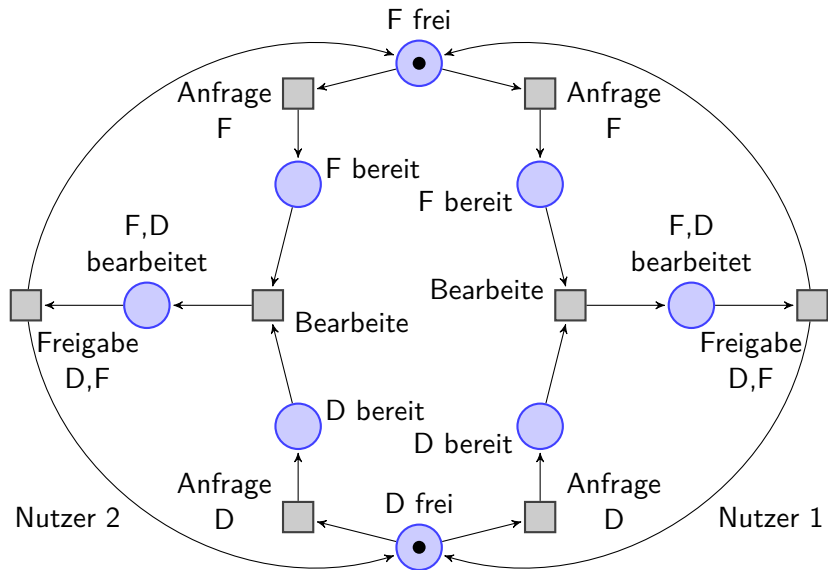
- Ampelschaltung an der Kreuzung zweier Straßen (Ost-West, Nord-Süd)
- zu jedem Zeitpunkt hat eine Straße „grün“, die andere „rot“
- die Grün-Phasen und Rot-Phasen der beiden Straßen wechseln sich ab
- ignorieren zur Vereinfachung die Gelb-Phase



Modellierung mit Petri-Netzen - Geteilte Ressourcen

- zwei Nutzer teilen sich eine Festplatte (F) und einen Drucker (D)
- zu jedem Zeitpunkt kann nur einer der Nutzer beide Ressourcen nutzen, um eine Datei zu drucken

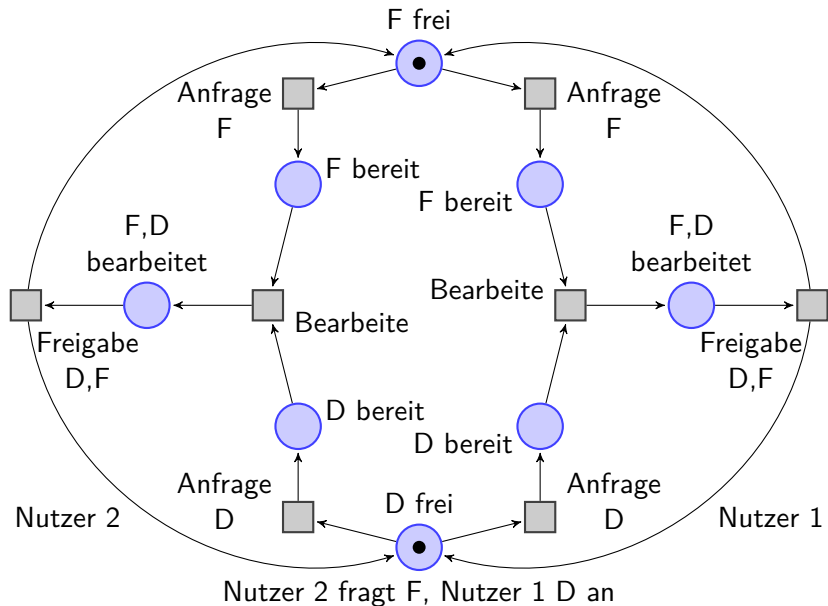
Modellierung mit Petri-Netzen - Geteilte Ressourcen



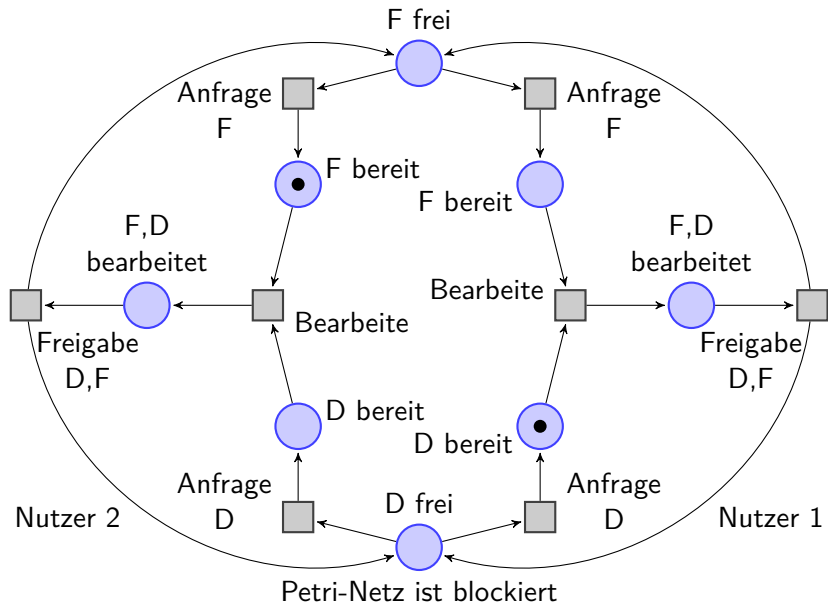
Lebendige Petri-Netze

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.

Modellierung mit Petri-Netzen - Geteilte Ressourcen



Modellierung mit Petri-Netzen - Geteilte Ressourcen



Lebendige Petri-Netze

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.

Lebendige Petri-Netze

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.
- $M' : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ Markierung von P .
- Existieren Markierungen $M_0 = M, M_1, \dots, M_n = M'$, wobei M_{i+1} Nachfolgemarkierung von M_i ist, so sagen wir, dass M' von M erreichbar ist.

Lebendige Petri-Netze

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.
- $M' : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ Markierung von P .
- Existieren Markierungen $M_0 = M, M_1, \dots, M_n = M'$, wobei M_{i+1} Nachfolgemarkierung von M_i ist, so sagen wir, dass M' von M erreichbar ist.

Definition 7

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz mit Anfangsmarkierung M_0 . Eine Transition $t \in T$ heißt lebendig, wenn es zu jeder Markierung M' , die von M_0 erreichbar ist, eine Markierung M'' gibt, die von M' erreichbar ist und in der t schalten kann.

Lebendige Petri-Netze

- Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz und $M : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Markierung.
- P mit Markierung M heißt blockiert, wenn keine Transition $t \in T$ bei Markierung M schalten kann.
- $M' : S \rightarrow \mathbb{N}_0$ Markierung von P .
- Existieren Markierungen $M_0 = M, M_1, \dots, M_n = M'$, wobei M_{i+1} Nachfolgemarkierung von M_i ist, so sagen wir, dass M' von M erreichbar ist.

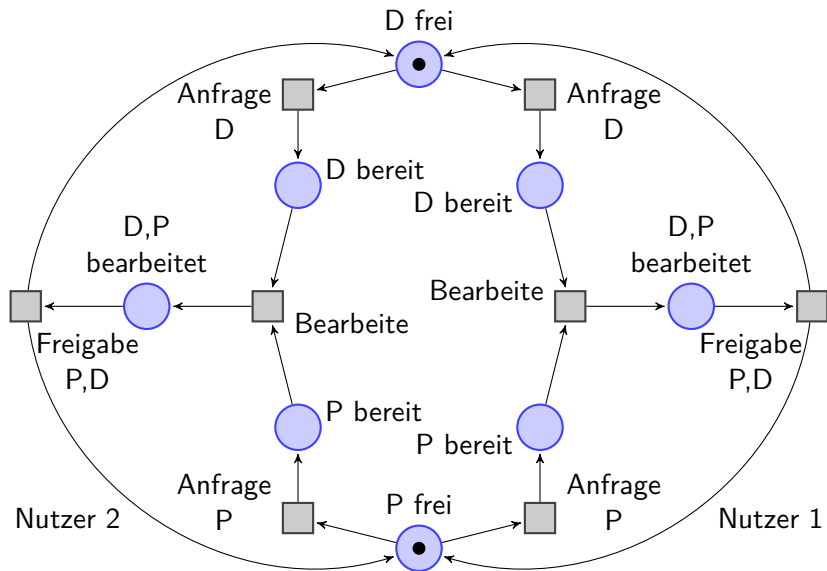
Definition 7

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz mit Anfangsmarkierung M_0 . Eine Transition $t \in T$ heißt lebendig, wenn es zu jeder Markierung M' , die von M_0 erreichbar ist, eine Markierung M'' gibt, die von M' erreichbar ist und in der t schalten kann.

Definition 8

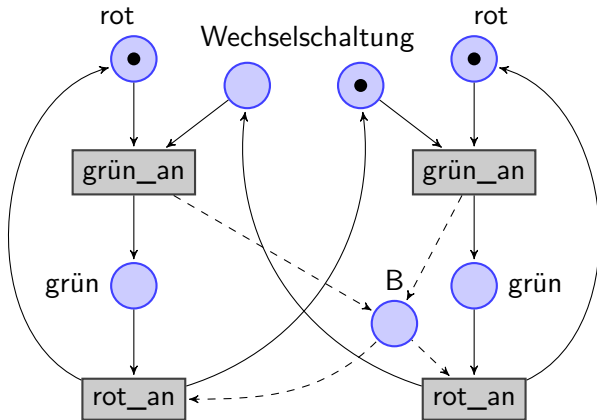
Ein Petri-Netz $P = (S, T, F)$ mit Anfangsmarkierung M_0 heißt lebendig, wenn alle Transitionen $t \in T$ lebendig sind.

Modellierung mit Petri-Netzen - Geteilte Ressourcen



Petri-Netz ist nicht lebendig.

Erweiterte Ampelschaltung



- B zählt Anzahl der Ampeln mit „grün“.
- Es sollte nie $M(B) \geq 2$ gelten.

Sichere Petri-Netze

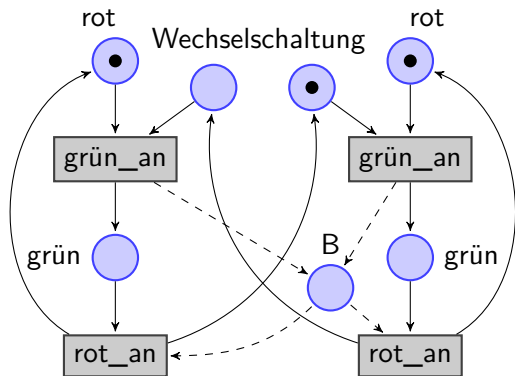
Definition 9

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz mit Anfangsmarkierung M_0 . Dann heißt P sicher oder binär, wenn für alle von M_0 erreichbaren Markierungen M und alle Stellen $s \in S$ gilt $M(s) \leq 1$.

Sichere Petri-Netze

Definition 9

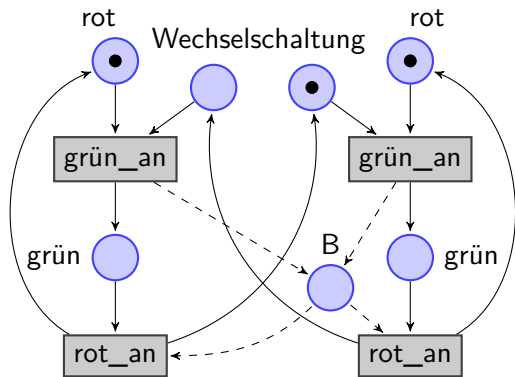
Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz mit Anfangsmarkierung M_0 . Dann heißt P sicher oder binär, wenn für alle von M_0 erreichbaren Markierungen M und alle Stellen $s \in S$ gilt $M(s) \leq 1$.



Sichere Petri-Netze

Definition 9

Sei $P = (S, T, F)$ ein Petri-Netz mit Anfangsmarkierung M_0 . Dann heißt P sicher oder binär, wenn für alle von M_0 erreichbaren Markierungen M und alle Stellen $s \in S$ gilt $M(s) \leq 1$.



- sicheres Petri-Netz
- ⇒ es gilt immer

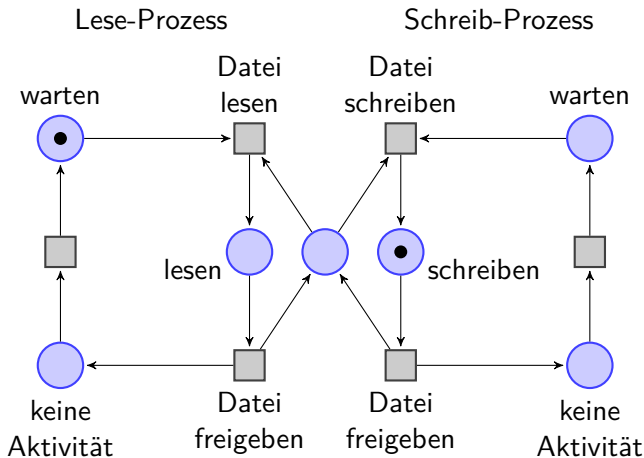
$$M(B) \leq 1$$

Modellierung mit Petri-Netzen - Lese-Schreib-Prozesse

- Ein Lese-Prozess und ein Schreib-Prozess greifen auf dieselben Dateien zu
- zu jedem Zeitpunkt soll nur einer der Prozesse auf eine Datei zugreifen können

Modellierung mit Petri-Netzen - Lese-Schreib-Prozesse

- Ein Lese-Prozess und ein Schreib-Prozess greifen auf dieselben Dateien zu
- zu jedem Zeitpunkt soll nur einer der Prozesse auf eine Datei zugreifen können



Erweiterungen von Petri-Netzen

- bislang nur die Grundvariante von Petri-Netzen kennengelernt
- es gibt viele Erweiterungen, die die Ausdruckstärke von Petri-Netzen erhöhen
- betrachten zwei Variante
 - ① Petri-Netze mit Kantengewichten
 - ② Petri-Netze mit Kapazitäten

Erweiterungen von Petri-Netzen - Kantengewichte

- bislang nur die Grundvariante von Petri-Netzen kennengelernt
- es gibt viele Erweiterungen, die die Ausdruckstärke von Petri-Netzen erhöhen
- betrachten zwei Variante
 - ① Petri-Netze mit Kantengewichten
 - ② Petri-Netze mit Kapazitäten

Definition 10

Ein Petri-Netz mit Kantengewichten ist ein Petri-Netz $P = (S, T, F)$ mit einer Funktion $g : F \rightarrow \mathbb{N}$.

Erweiterungen von Petri-Netzen - Kantengewichte

- bislang nur die Grundvariante von Petri-Netzen kennengelernt
- es gibt viele Erweiterungen, die die Ausdruckstärke von Petri-Netzen erhöhen
- betrachten zwei Variante
 - ① Petri-Netze mit Kantengewichten
 - ② Petri-Netze mit Kapazitäten

Definition 10

Ein Petri-Netz mit Kantengewichten ist ein Petri-Netz $P = (S, T, F)$ mit einer Funktion $g : F \rightarrow \mathbb{N}$.

Schaltregeln:

- eine Transition t kann nur schalten, wenn für alle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ gilt $M(s) \geq g((s, t))$
- Schalten einer Transition t entfernt aus jeder Stelle $s \in \text{Vorbereich}(t)$ genau $g((s, t))$ Marken und fügt jeder Stelle $s \in \text{Nachbereich}(t)$ genau $g((t, s))$ Marken hinzu

Erweiterungen von Petri-Netzen - Kapazitäten

- bislang nur die Grundvariante von Petri-Netzen kennengelernt
- es gibt viele Erweiterungen, die die Ausdruckstärke von Petri-Netzen erhöhen
- betrachten zwei Variante
 - ① Petri-Netze mit Kantengewichten
 - ② Petri-Netze mit Kapazitäten

Definition 11

Ein Petri-Netz mit Kapazitäten ist ein Petri-Netz $P = (S, T, F)$ mit einer Funktion $k : S \rightarrow \mathbb{N}_0$.

Erweiterungen von Petri-Netzen - Kapazitäten

- bislang nur die Grundvariante von Petri-Netzen kennengelernt
- es gibt viele Erweiterungen, die die Ausdruckstärke von Petri-Netzen erhöhen
- betrachten zwei Variante
 - ① Petri-Netze mit Kantengewichten
 - ② Petri-Netze mit Kapazitäten

Definition 11

Ein Petri-Netz mit Kapazitäten ist ein Petri-Netz $P = (S, T, F)$ mit einer Funktion $k : S \rightarrow \mathbb{N}_0$.

Schaltregeln:

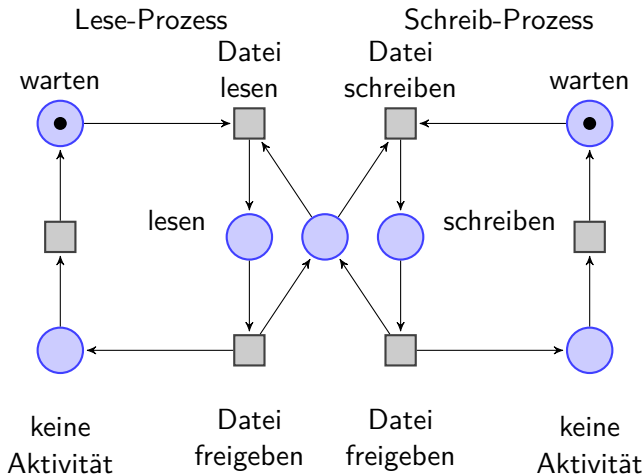
- eine Transition t kann nur schalten, wenn durch die Schaltung die Anzahl der Marken auf einer Stelle $s \in \text{Nachbereich}(t)$ nicht größer als $k(s)$ wird
- können Petri-M Netze mit Kantengewichte und Kapazitäten kombinieren

Modellierung mit Kantengewichten - Lese-Schreib-Prozesse

- n Lese-Prozesse und m Schreibprozesse auf einer Datei
- Lese-Prozesse können gleichzeitig zugreifen, Schreib-Prozesse können nicht mit anderen Prozessen gleichzeitig auf Dateien zugreifen

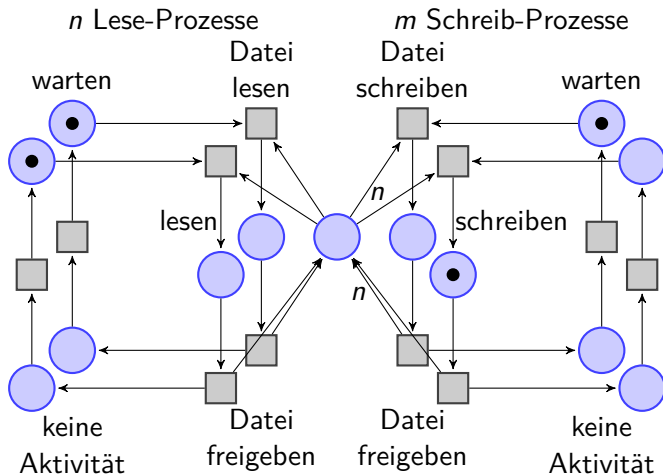
Modellierung mit Kantengewichten - Lese-Schreib-Prozesse

- n Lese-Prozesse und m Schreibprozesse auf einer Datei
- Lese-Prozesse können gleichzeitig zugreifen, Schreib-Prozesse können nicht mit anderen Prozessen gleichzeitig auf Dateien zugreifen



Modellierung mit Kantengewichten - Lese-Schreib-Prozesse

- n Lese-Prozesse und m Schreibprozesse auf einer Datei
- Lese-Prozesse können gleichzeitig zugreifen, Schreib-Prozesse können nicht mit anderen Prozessen gleichzeitig auf Dateien zugreifen



Modellierung mit Kantengewichten und Kapazitäten

- zyklischer Produzenten-Prozess legt Produkte in Puffer ab, jeweils zwei gleichzeitig (Kantengewicht)
- Pufferkapazität ist auf 6 begrenzt
- Konsument entnimmt Produkte einzeln

Modellierung mit Kantengewichten und Kapazitäten

- zyklischer Produzenten-Prozess legt Produkte in Puffer ab, jeweils zwei gleichzeitig (Kantengewicht)
- Pufferkapazität ist auf 6 begrenzt
- Konsument entnimmt Produkte einzeln

