

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.
- 3 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.
- 3 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

Beweisfolge: (2) \Rightarrow (1), (1) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (2).

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.
- 3 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

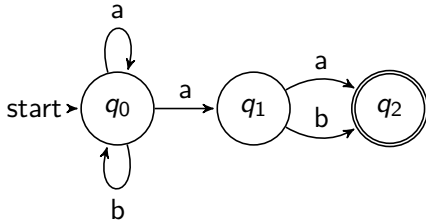
Beweisfolge: (2) \Rightarrow (1), (1) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (2).

Definition 2

Sprachen, die die Bedingungen aus Satz 1 erfüllen, heißen regulär.

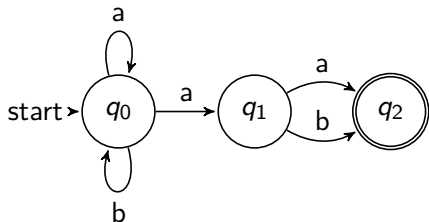
Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3 :



Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

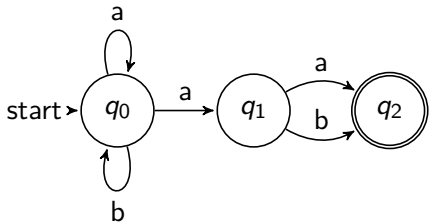
NFA N_3 :



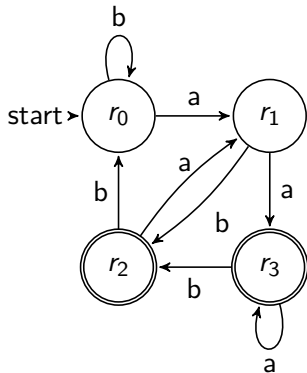
$$L(N_3) = \{w \mid \text{das vorletzte} \\ \text{Symbol in } w \text{ ist a}\}$$

Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3 :



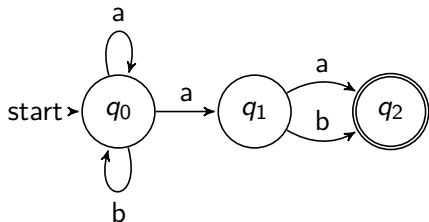
DFA \tilde{A}_3 :



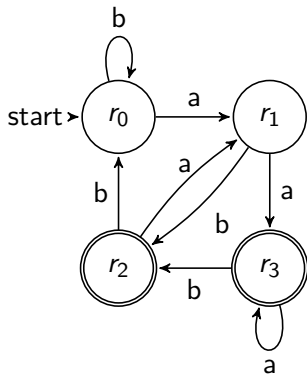
$$L(N_3) = \{w \mid \text{das vorletzte} \\ \text{Symbol in } w \text{ ist } a\}$$

Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3 :



DFA \tilde{A}_3 :



$L(N_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist } a\}$

$L(\tilde{A}_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist } a\}$

Von NFAs zu DFAs

Die Konstruktion (Potenzmengenkonstruktion)

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein NFA. Wir definieren den DFA $A = (\Sigma, Q^A, \delta^A, q_0^A, F^A)$ durch

- $Q^A := \text{Pow}(Q)$,
- $q_0^A := \{q_0\}$,
- $F^A := \{R \in Q^A \mid R \cap F \neq \emptyset\}$,
- Für alle $a \in \Sigma, R \in \text{Pow}(Q)$:

$$\delta^A(R, a) = \{q \in Q \mid \text{es gibt ein } r \in R \text{ mit } q \in \delta(r, a)\}.$$

Von NFAs zu DFAs

Die Konstruktion (Potenzmengenkonstruktion)

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein NFA. Wir definieren den DFA $A = (\Sigma, Q^A, \delta^A, q_0^A, F^A)$ durch

- $Q^A := \text{Pow}(Q)$,
- $q_0^A := \{q_0\}$,
- $F^A := \{R \in Q^A \mid R \cap F \neq \emptyset\}$,
- Für alle $a \in \Sigma, R \in \text{Pow}(Q)$:

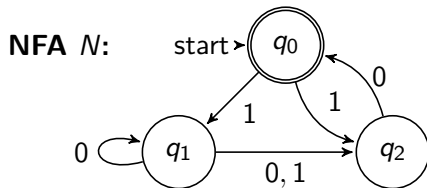
$$\delta^A(R, a) = \{q \in Q \mid \text{es gibt ein } r \in R \text{ mit } q \in \delta(r, a)\}.$$

Äquivalente Definition für $\delta^A(\cdot)$

Für alle $a \in \Sigma, R \in \text{Pow}(Q)$:

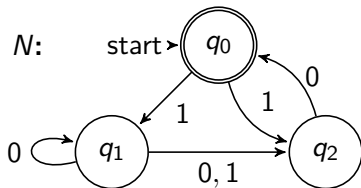
$$\delta^A(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a).$$

Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

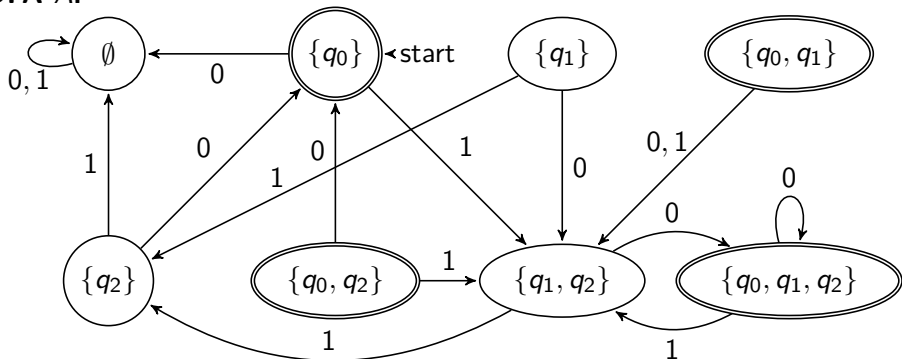


Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N :



DFA A :



Von NFAs zu DFAs - Korrektheit der Konstruktion

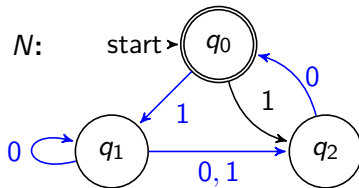
Beweis ($L(N) = L(A)$)

$$\begin{aligned}w \in L(N) &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \delta^A(q_0^A, w) \in F^A \\ &\Leftrightarrow w \in L(A).\end{aligned}$$

Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

$w = 1000$

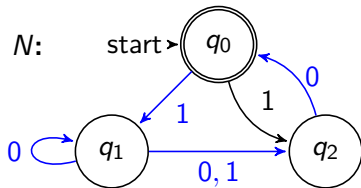
NFA N :



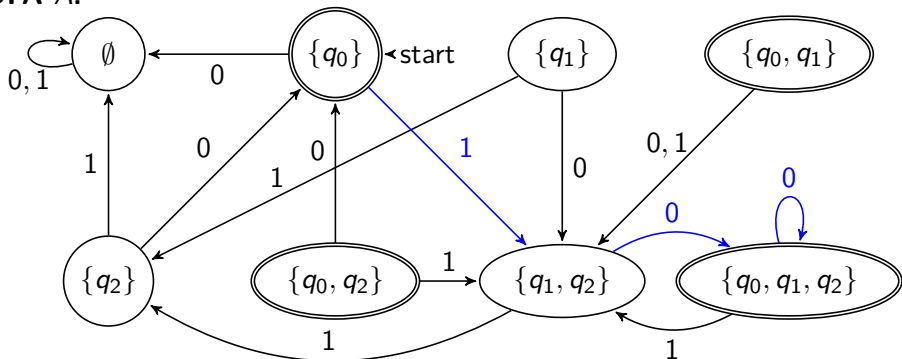
Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

$w = 1000$

NFA N :

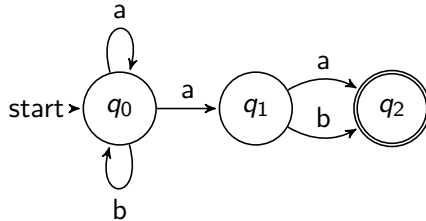


DFA A :



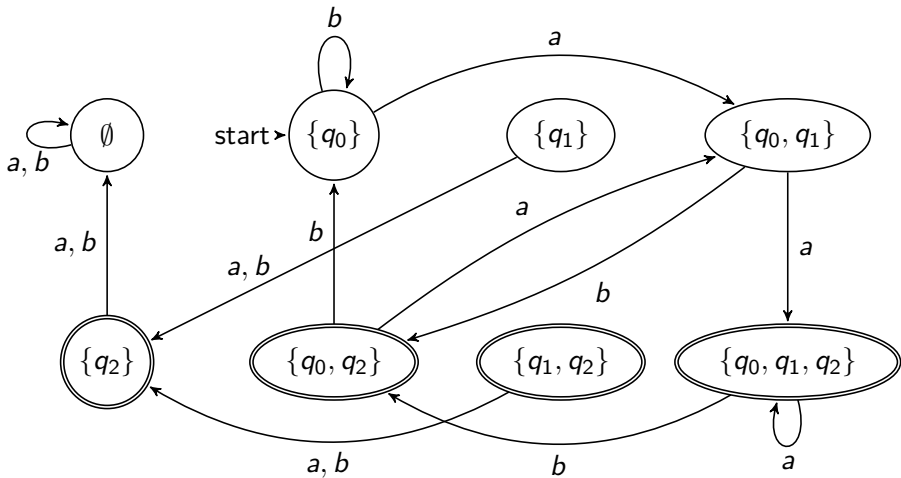
Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3 :



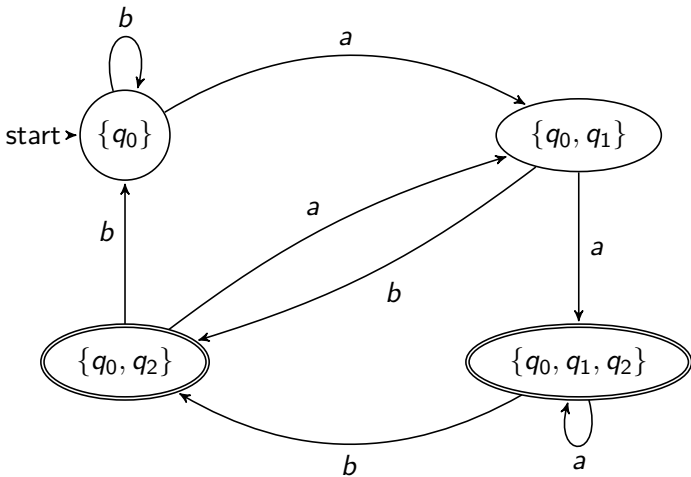
Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

DFA A_3 :



Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

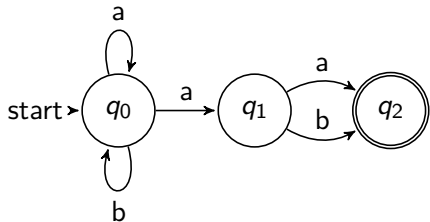
DFA \hat{A}_3 :



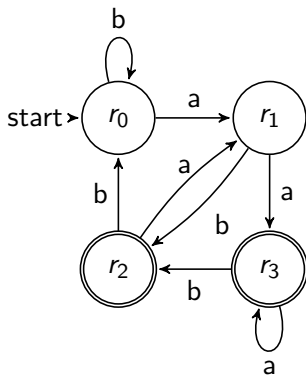
Beobachtung $\hat{A}_3 = \tilde{A}_3$

Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3 :



DFA \tilde{A}_3 :



$$L(N_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist } a\}$$

$$L(\tilde{A}_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist } a\}$$

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- *Vereinigung*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt*
- *Konkatenation*
- *Sternbildung*

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Beweis

Vereinigung: (über NFAs)

- L_1, L_2 regulär, NFAs N_1, N_2 mit $L(N_1) = L_1, L(N_2) = L_2$
- $N_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, r_0, F_1), N_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, s_0, F_2),$
 $Q_1 = \{r_0, \dots, r_l\}, Q_2 = \{s_0, \dots, s_m\}$
- NFA $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, wobei
 - ▶ Setze $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, wobei $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$
 - ▶ Setze $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\} & \text{falls } \epsilon \in L_1 \cup L_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{sonst} \end{cases}$
 - ▶ Für alle $a \in \Sigma$ setze $\delta(q_0, a) = \delta_1(r_0, a) \cup \delta_2(s_0, a)$
 - ▶ Für alle $(q, a) \in Q_1 \times \Sigma$ setze $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$
 - ▶ Für alle $(q, a) \in Q_2 \times \Sigma$ setze $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$

$$\Rightarrow L(N) = L_1 \cup L_2$$

Beweis

Konkatenation: (über NFAs)

- L_1, L_2 regulär, NFAs N_1, N_2 mit $L(N_1) = L_1, L(N_2) = L_2$
- $N_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, r_0, F_1), N_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, s_0, F_2),$
 $Q_1 = \{r_0, \dots, r_l\}, Q_2 = \{s_0, \dots, s_m\}$
- NFA $N = (\Sigma, Q, \delta, r_0, F)$, wobei
 - ▶ Setze $Q = Q_1 \cup Q_2$ und $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{falls } \epsilon \in L_2 \\ F_2 & \text{sonst} \end{cases}$
 - ▶ Für alle $a \in \Sigma$ setze $\delta(r_0, a) = \begin{cases} \delta_1(r_0, a) \cup \delta_2(s_0, a) & \text{falls } \epsilon \in L_1 \\ \delta_1(r_0, a) & \text{sonst} \end{cases}$
 - ▶ Für alle $(q, a) \in Q_1 \times \Sigma$ setze
 $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) \cup \{s_0\} & \text{falls } \delta_1(q, a) \cap F_1 \neq \emptyset \\ \delta_1(q, a) & \text{sonst} \end{cases}$
 - ▶ Für alle $(q, a) \in Q_2 \times \Sigma$ setze $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$

$$\Rightarrow L(N) = L_1 L_2$$

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Beweis

Sternbildung: (über NFAs)

- L regulär, NFA N' mit $L(N') = L$
- es gibt NFA $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $L(N) = L \cup \{\epsilon\}$
- NFA $N^* = (\Sigma, Q, \delta^*, q_0, F)$, wobei

▶ Für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$ setze

$$\delta^*(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) \cup \{q_0\} & \text{falls } \delta(q, a) \cap F \neq \emptyset \\ \delta(q, a) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(N^*) = L^*$$

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- *Vereinigung*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt*
- *Konkatenation*
- *Sternbildung*

Beweis

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- Vereinigung
- Komplementbildung
- Durchschnitt
- Konkatenation
- Sternbildung

Beweis

Komplement: (über DFAs)

- $L \subseteq \Sigma^*$ regulär
 - $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA mit $L(A) = L$.
 - $\bar{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, Q \setminus F)$ DFA mit $L(\bar{A}) = \Sigma^* \setminus L$
- $\Rightarrow \Sigma^* \setminus L$ regulär

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- Vereinigung
- Komplementbildung
- Durchschnitt
- Konkatenation
- Sternbildung

Beweis

Durchschnitt: (über Vereinigung und Komplement)

- L_1, L_2 regulär, $L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \setminus L_1 \cup \Sigma^* \setminus L_2)$
 - $\Sigma^* \setminus L_1, \Sigma^* \setminus L_2$ regulär
 - $\Sigma^* \setminus L_1 \cup \Sigma^* \setminus L_2$ regulär
- $\Rightarrow L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \setminus L_1 \cup \Sigma^* \setminus L_2)$ regulär

DFAs, NFAs und reguläre Ausdrücke

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.
- 3 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

Beweis ((3) \Rightarrow (2))

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.
- 3 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

Beweis ((3) \Rightarrow (2))

Sei R ein regulärer Ausdruck über Alphabet Σ .

- Für $R = \emptyset$ oder $R = a$ mit $a \in \Sigma \cup \epsilon$, so gibt es einen NFA N mit $L(R) = L(N)$.
- Ist $R = R_1 \mid R_2$ oder $R = R_1 R_2$ für reguläre Ausdrücke R_1, R_2 , so gibt es NFAs N_1, N_2 mit $L(N_1) = L(R_1)$ und $L(N_2) = L(R_2)$. Damit gibt es nach Beweis für Satz 3 NFA N mit $L(N) = L(R)$.

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.
- 2 Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.
- 3 Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.

Beweis ((3) \Rightarrow (2))

- Ist $R = R_1^*$ für einen regulären Ausdruck R_1 , so gibt es einen NFA N_1 mit $L(N_1) = L(R_1)$. Damit gibt es nach Beweis für Satz 3 NFA N mit $L(N) = L(R)$.
- Ist $R = (R_1)$ für einen regulären Ausdruck R_1 , so gibt es einen NFA N_1 mit $L(N_1) = L(R_1)$. Da $L(R) = L(R_1)$, gilt dann auch $L(N_1) = L(R)$.

Satz 3

- 1 Die Sprache $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär.
- 2 Die Sprache $\{1^{n^2} \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.
- 3 Die Sprache $\{1^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.
- 4 Die Sprache bestehend aus korrekten Klammerausdrücken ist nicht regulär.

Pumping Lemma

Satz 4

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$ eine Aufteilung von x in 3 Teile $u, v, w \in \Sigma^*$, $x = uvw$ existiert mit:

- 1 $|uv| \leq p$
- 2 $|v| \geq 1$
- 3 für alle $i \geq 0$ liegt das Wort $uv^i w$ in L .

Beweis und Illustration Pumping Lemma

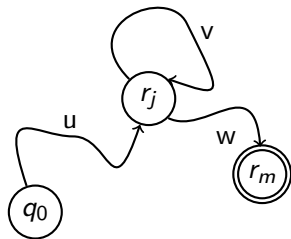
Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA mit $L(A) = L$.
- Setzen $p := |Q|$.
- $x = x_1 \cdots x_m \in L$ beliebig mit $|x| = m \geq p$.
- Seien $q_0 = r_0, r_1, \dots, r_m$ die Zustände, die A bei Eingabe x durchläuft.
- Es existieren $i, j, 0 \leq i, j \leq p, i < j$, mit $r_i = r_j$
- Setzen
$$u := x_1 \cdots x_i, v := x_{i+1} \cdots x_j,$$
$$w := x_{j+1} \cdots x_m$$
- Eigenschaften 1 und 2 damit erfüllt □

Beweis und Illustration Pumping Lemma

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA mit $L(A) = L$.
- Setzen $p := |Q|$.
- $x = x_1 \cdots x_m \in L$ beliebig mit $|x| = m \geq p$.
- Seien $q_0 = r_0, r_1, \dots, r_m$ die Zustände, die A bei Eingabe x durchläuft.
- Es existieren $i, j, 0 \leq i, j \leq p, i < j$, mit $r_i = r_j$
- Setzen
$$u := x_1 \cdots x_i, v := x_{i+1} \cdots x_j,$$
$$w := x_{j+1} \cdots x_m$$
- Eigenschaften 1 und 2 damit erfüllt □

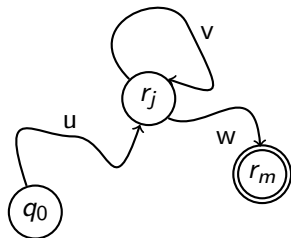


Beweis und Illustration Pumping Lemma

Beweis.

- $\delta(q_0, u) = r_i = r_j$, $\delta(r_j, v) = r_j$,
 $\delta(r_j, w) = r_m \in F$
- Für $i = 0$:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, uv^0w) &= \delta(q_0, uw) \\ &= \delta(\delta(q_0, u), w) \\ &= \delta(r_j, w) \\ &= r_m \in F\end{aligned}$$



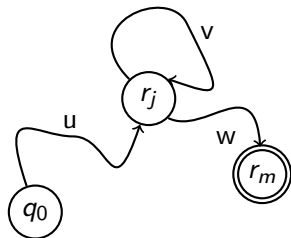
□

Beweis und Illustration Pumping Lemma

Beweis.

- $\delta(q_0, u) = r_i = r_j$, $\delta(r_j, v) = r_j$
 $\delta(r_j, w) = r_m \in F$
- Für $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, uv^i w) &= \delta(\delta(q_0, u), v^i w) \\ &= \delta(r_j, v^i w) \\ &= \delta(\delta(r_j, v), v^{i-1} w) \\ &= \delta(r_j, v^{i-1} w) \\ &\vdots \\ &= \delta(r_j, vw) \\ &= \delta(\delta(r_j, v), w) \\ &= \delta(r_j, w) = r_m \in F. \quad \square\end{aligned}$$



Pumping Lemma und Kontraposition

Ist L regulär, so gilt:

L ist nicht regulär, wenn

Pumping Lemma und Kontraposition

Ist L regulär, so gilt:

L ist nicht regulär, wenn

Es existiert ein $p \in \mathbb{N}$,
so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$
eine Aufteilung $x = uvw$ existiert
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
wobei für alle $i \geq 0$
 $uv^i w \in L$.

Pumping Lemma und Kontraposition

Ist L regulär, so gilt:

Es existiert ein $p \in \mathbb{N}$,
so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$
eine Aufteilung $x = uvw$ existiert
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
wobei für alle $i \geq 0$
 $uv^i w \in L$.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen $x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 1

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,

so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 1

Satz 5

Die Sprache $L_1 := \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 1

Satz 5

Die Sprache $L_1 := \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

- $p \in \mathbb{N}$ beliebig.
 - Sei $x = 0^p 1^p$, also $x \in L_1$.
 - Für jede Aufteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$ gilt $v = 0^k$ mit $1 \leq k \leq p$.
 - Wählen $i = 2$.
 - Damit $uv^i w = 0^{p+k} 1^p$ und $uv^i w = uv^2 w \notin L_1$.
- $\Rightarrow L_1$ ist nicht regulär.



L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 2

Satz 6

Die Sprache $L_2 := \{1^{n^2} \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,

so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 2

Satz 6

Die Sprache $L_2 := \{1^{n^2} \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis

- $p \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Sei $x = 1^{p^2}$, also $x \in L_2$.
- Sei $x = uvw$ eine beliebige Aufteilung von x mit $|uv| \leq p$ und $1 \leq |v| \leq p$.
- Wählen $i = 2$.
- $uv^i w = 1^{|x|+|v|} = 1^{p^2+|v|}$

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,

so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 2

Satz 6

Die Sprache $L_2 := \{1^{n^2} \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis

- $p^2 + |v| > p^2$
- $p^2 + |v| \leq p^2 + p < (p+1)^2$
- $p^2 + |v|$ kein Quadrat und $uv^i w \notin L_2$.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 3

Satz 7

Die Sprache $L_3 := \{1^q \mid q \text{ Primzahl}\}$
ist nicht regulär.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 3

Satz 7

Die Sprache $L_3 := \{1^q \mid q \text{ Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis

- $p \in \mathbb{N}$ beliebig und $q \geq p + 2$ Primzahl
- Sei $x = 1^q$, also $x \in L_3$.
- Sei $x = uvw$ eine beliebige Aufteilung von x mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$.
- $|uv| \leq p, q \geq p + 2 \Rightarrow |uw| \geq 2$
- Wählen $i = |uw|$.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 3

Satz 7

Die Sprache $L_3 := \{1^q \mid q \text{ Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis

- Somit

$$\begin{aligned} uv^i w &= 1^{|uw|+i|v|} \\ &= 1^{|uw|+|uw||v|} \\ &= 1^{(|v|+1)|uw|} \end{aligned}$$

- $|uw|, |v| + 1 \geq 2$
 - $(|v| + 1)|uw|$ keine Primzahl
- $\Rightarrow uv^i w = 1^{(|v|+1)|uw|} \notin L_3$

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$

existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen

$x = uvw$

mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert,

so dass $uv^i w \notin L$.