18. Divide & Conquer

Generische Optimierungsverfahren:

- Systematische Suche
  – lass nichts aus
- Divide and Conquer
  – löse das Ganze in Teilen
- Dynamische Programmierung
  – mache nie etwas zweimal
- Greedy Verfahren
  – schau niemals zurück
- Lokale Suche
  – denke global, handle lokal

Systematische Suche

Prinzip: durchsuche gesamten Lösungsraum

Auch bekannt als „Brute Force“

Vorteil: sehr einfach zu implementieren

Nachteil: sehr zeitaufwendig und sollte daher nur für kleine Instanzen verwendet werden

Systematische Suche

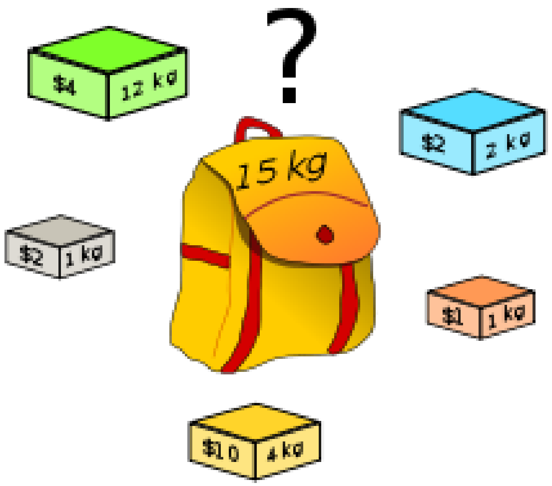
Beispiele:

- Suche in unsortierter Liste
- Suche über Broadcasting in unstrukturierten verteilten Systemen (Peer-to-Peer Systeme)
- Rucksackproblem (siehe nächste Folie)

Systematische Suche

Rucksackproblem:

- Eingabe: n Objekte mit Gewichten $w_1,\ldots,w_n$ und Werten $v_1,\ldots,v_n$ und Rucksack mit Kapazität W
- Ausgabe: Objektmenge M maximalen Wertes, die in Rucksack passt



Systematische Suche

Lösung zum Rucksackproblem:

Probiere alle Teilmengen von Objekten aus und merke die Menge M von Objekten mit $\sum_{i \in M} w_i \leq W$, die bisher den maximalen Wert hatte

Aufwand: $O(2^n)$, da es 2^n Möglichkeiten gibt, Teilmengen aus einer n-elementigen Menge zu bilden.

Divide & Conquer

Teile & Herrsche:

- Problem in Teilprobleme aufteilen
- Teilprobleme rekursiv lösen
- Lösung aus Teillösungen zusammensetzen

Probleme:

- Wie setzt man zusammen?
  [erfordert algorithmisches Geschick und Übung]
- Laufzeitanalyse (Auflösen der Rekursion)
  [ist normalerweise nach Standardschema; erfordert ebenfalls Übung]

Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Binary Search
- Arithmische Operationen wie Multiplikation großer Zahlen oder Matrixmultiplikation
- Selektion
- Nächstes-Paar-Problem

Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplikation

$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $C=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 20 & 23 & 29 \\ 14 & 14 & \ldots & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \end{pmatrix}$$

$$c_{ij}= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Matrix Multiplikation

Teile & Herrsche:

- Problem: Berechne das Produkt zweier n×n Matrizen
- Eingabe: Matrizen X,Y
- Ausgabe: Matrix Z = X·Y

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,4} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & y_{2,4} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & y_{3,4} \\ y_{4,1} & y_{4,2} & y_{4,3} & y_{4,4} \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)

1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]
2. **for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**
3.   **for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**
4.   Z[i][j] $\leftarrow$ 0
5.   **for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**
6.   Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]
7. **return** Z

Matrix Multiplikation

```
MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)
new array Z[1,..,n][1,..,n]
for i←1 to n do
    for j ← 1 to n do
        Z[i][j] ← 0
        for k ←1 to n do
            Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
return Z
```

Laufzeit:

$\Theta(n^2)$

Matrix Multiplikation

```
MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)                   Laufzeit:
new array Z[1,..,n][1,..,n]                            Θ(n²)
for i←1 to n do                                        Θ(n)
    for j ← 1 to n do
        Z[i][j] ← 0
        for k ←1 to n do
            Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
return Z
```

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
new array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
for i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
for j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
Z[i][j] $\leftarrow$ 0	
for k $\leftarrow$1 **to** n **do**	
Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	
return Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
new array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
for i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
for j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
for k $\leftarrow$1 **to** n **do**	
Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	
return Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6. Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	
7. **return** Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6. Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]	$\Theta(n^3)$
7. **return** Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)		Laufzeit:
1.	**new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2.	**for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3.	**for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4.	Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
5.	**for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6.	Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	$\Theta(n^3)$
7.	**return** Z	$\Theta(1)$

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
new array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**	$\Theta(n)$
for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
$Z[i][j] \leftarrow 0$	$\Theta(n^2)$
for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
$Z[i][j] \leftarrow Z[i][j] + X[i][k] \cdot Y[k][j]$	$\Theta(n^3)$
return Z	$\Theta(1)$
	$\Theta(n^3)$

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Aufwand:

- 8 Multiplikationen von $n/2 \times n/2$ Matrizen
- 4 Additionen von $n/2 \times n/2$ Matrizen

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Aufwand:

- 8 Multiplikationen von $n/2 \times n/2$ Matrizen
- 4 Additionen von $n/2 \times n/2$ Matrizen

Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$

Laufzeit:

- $T(n) = \underset{a}{8} \cdot T(n/\underset{b}{2}) + \underset{f(n)}{k \cdot n^2}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8$, $b=2$

Laufzeit:

- $\underbrace{T(n) = \underset{a}{8} \cdot T(n/\underset{b}{2}) + \underset{f(n)}{k \cdot n^2}}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8$, $b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = \underbrace{8}_{a} \cdot T(n/\underbrace{2}_{b}) + \underbrace{k \cdot n^2}_{f(n)}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8$, $b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$
- Formaler Beweis durch Induktion!!

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$

  $\underbrace{8}_{a}$, $\underbrace{2}_{b}$, $\underbrace{k \cdot n^2}_{f(n)}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8$, $b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$
- Formaler Beweis durch Induktion!!
- Nicht besser als einfacher Algorithmus

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche (Algorithmus von Strassen):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Trick:

$P_1 = A \cdot (F-H)$ $\quad$ $P_5 = (A+D) \cdot (E+H)$

$P_2 = (A+B) \cdot H$ $\quad$ $P_6 = (B-D) \cdot (G+H)$

$P_3 = (C+D) \cdot E$ $\quad$ $P_7 = (A-C) \cdot (E+F)$

$P_4 = D \cdot (G-E)$

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche (Algorithmus von Strassen):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Trick:

$P_1 = A \cdot (F-H)$

$P_2 = (A+B) \cdot H$

$P_3 = (C+D) \cdot E$

$P_4 = D \cdot (G-E)$

$P_5 = (A+D) \cdot (E+H)$

$P_6 = (B-D) \cdot (G+H)$

$P_7 = (A-C) \cdot (E+F)$

$AE+BG = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$

$AF+BH = P_1 + P_2$

$CE+DG = P_3 + P_4$

$CF+DH = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Trick:

$P_1 = A \cdot (F - H)$

$P_2 = (A + B) \cdot H$

$P_3 = (C + D) \cdot E$

$P_4 = D \cdot (G - E)$

$P_5 = (A + D) \cdot (E + H)$

$P_6 = (B - D) \cdot (G + H)$

$P_7 = (A - C) \cdot (E + F)$

$AE + BG = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$

$AF + BH = P_1 + P_2$

$CE + DG = P_3 + P_4$

$CF + DH = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

7 Multiplikationen!!!

Laufzeit:

- $T(n) = \underset{a}{7} \cdot T(n/\underset{b}{2}) + \underset{f(n)}{k \cdot n^2}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$

Laufzeit:

- $T(n) = \underbrace{7}_{a} \cdot T(n/\underbrace{2}_{b}) + \underbrace{k \cdot n^2}_{f(n)}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=7$, $b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a})$

Laufzeit:

- $T(n) = \underbrace{7}_{a} \cdot T(n/\underbrace{2}_{b}) + \underbrace{k \cdot n^2}_{f(n)}$

Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- a=7, b=2
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7})$

Laufzeit:

- $T(n) = \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{7} \cdot T(n/\underset{\substack{\uparrow \\ b}}{2}) + \underset{\substack{\uparrow \\ f(n)}}{k \cdot n^2}$

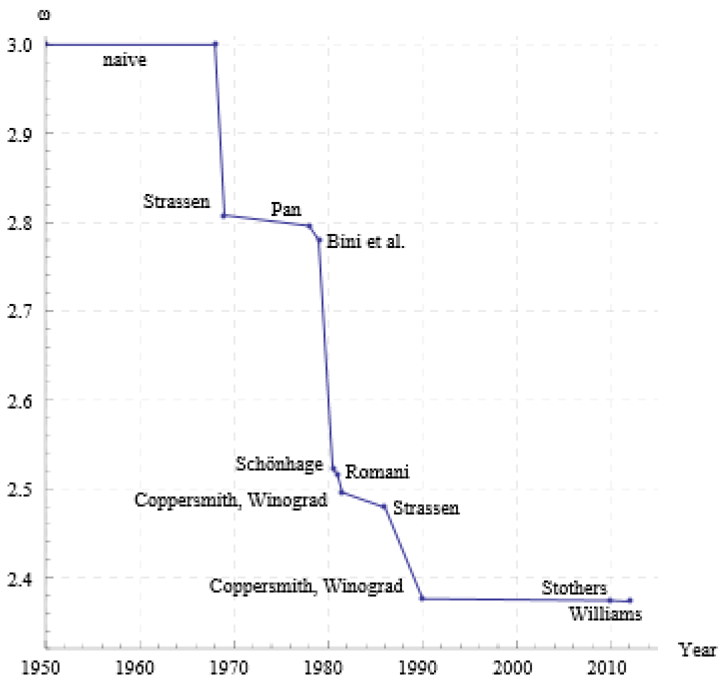
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=7$, $b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2,81})$
- Verbesserter Algorithmus!
  (Erheblicher Unterschied für große Eingaben)

Satz 18.1

Das Produkt zweier n×n Matrizen kann in $\Theta(n^{2,81})$ Laufzeit berechnet werden.

Seitdem verschiedene Verbesserungen:



Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Binary Search
- Arithmische Operationen wie Multiplikation großer Zahlen oder Matrixmultiplikation
- Selektion
- Nächstes-Paar-Problem

Selektion

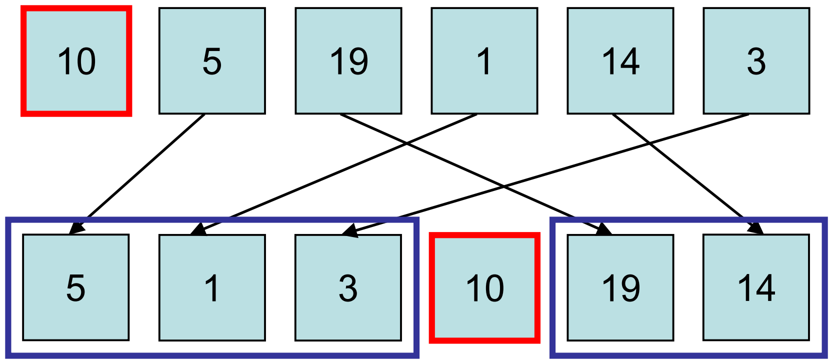
Problem: finde k-kleinstes Element in einer Folge von n Elementen

Lösung: sortiere Elemente (z.B. Mergesort), gib k-tes Element aus $\rightarrow$ Zeit $O(n \log n)$

Geht das auch schneller??

Selektion

Ansatz: verfahre ähnlich zu Quicksort



- j: Position des Pivotelements
- k<j: mach mit linker Teilfolge weiter
- k>j: mach mit rechter Teilfolge weiter

Selektion

```
Quickselect(A,l,r,k)
    ▷ A[l..r]: Restfeld, k: k-kleinstes Element, l≤k≤r
    if r=l then return a[l]
    i←Partition(A,l,r)    ▷ siehe Quicksort (Kapitel 6)
    if k<i then x←Quickselect(A,l,i-1,k)
    if k>i then x←Quickselect(A,i+1,r,k)
    if k=i then x←a[k]
    return x
```

Zum Vergleich Quicksort(A,l,r):

```
    if l<r then
        i←Partition(A,l,r)
        Quicksort(A,l,i-1)
        Quicksort(A,i+1,r)
```

Quickselect

- C(n): erwartete Anzahl Vergleiche

Satz 18.2: C(n)=O(n)

Beweis:

- Pivot ist gut: keine der Teilfolgen länger als 2n/3
- Sei p=Pr[Pivot ist gut]

- p=1/3

Quickselect

- Pivot gut: Restaufwand $\leq C(2n/3)$
- Pivot schlecht: Restaufwand $\leq C(n)$

$$
\begin{aligned}
& C(n) \leq n + p\cdot C(2n/3) + (1-p)\cdot C(n) \\
\Rightarrow\ & C(n) \leq n/p + C(2n/3) \\
& \leq 3n + C(2n/3) \leq 3(n+2n/3+4n/9+\ldots) \\
& \leq 3n \textstyle\sum_{i\geq 0} (2/3)^i \\
& \leq 3n / (1-2/3) = 9n
\end{aligned}
$$

BFPRT-Algorithmus

Gibt es auch einen deterministischen Selektionsalgorithmus mit linearer Laufzeit?

Ja, den BFPRT-Algorithmus (benannt nach den Erfindern Blum, Floyd, Pratt, Rivest und Tarjan).

BFPRT-Algorithmus

- Sei m eine ungerade Zahl ($5 \leq m \leq 21$).
- Betrachte die Zahlenmenge $S=\{a_1,\dots,a_n\}$.
- Gesucht: k-kleinste Zahl in S

Algorithmus BFPRT(S,k):

1. Teile S in $\lceil n/m \rceil$ Blöcke auf, davon $\lfloor n/m \rfloor$ mit m Elementen
2. Sortiere jeden dieser Blöcke (z.B. mit Insertionsort)
3. $S' :=$ Menge der $\lceil n/m \rceil$ Mediane der Blöcke.
4. $m \leftarrow \mathrm{BFPRT}(S', \lceil |S'|/2 \rceil)$ ▷ berechnet Median der Mediane
5. $S_1 \leftarrow \{ x \in S \mid x < m\}$; $S_2 \leftarrow \{x \in S \mid x > m\}$
6. if $k \leq |S_1|$ then return $\mathrm{BFPRT}(S_1,k)$
7. if $k > |S_1|+1$ then return $\mathrm{BFPRT}(S_2,k-|S_1|-1)$
8. return m

BFPRT-Algorithmus

- Sei m eine ungerade Zahl ($5 \le m \le 21$).
- Betrachte die Zahlenmenge $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$.
- Gesucht: k-kleinste Zahl in S.

Median: Wert in der Mitte einer sortierten Folge

Algorithmus BFPRT(S,k):

1. Teile S in $\lceil n/m \rceil$ Blöcke auf, da[illegible] $\lceil n/m \rceil$ mit m Elementen
2. Sortiere jeden dieser Blöcke (z.B. mit Insertionsort)
3. S':= Menge der $\lceil n/m \rceil$ Mediane der Blöcke.
4. $m \leftarrow \mathrm{BFPRT}(S', \lceil |S'|/2 \rceil)$ ▷ berechnet Median der Mediane
5. $S_1 \leftarrow \{ x \in S \mid x < m\}$; $S_2 \leftarrow \{x \in S \mid x > m\}$
6. if $k \le |S_1|$ then return $\mathrm{BFPRT}(S_1,k)$
7. if $k > |S_1|+1$ then return $\mathrm{BFPRT}(S_2,k-|S_1|-1)$
8. return m

BFPRT-Algorithmus

Laufzeit $T(n)$ des BFPRT-Algorithmus:

- Schritte 1-3: $O(n)$
- Schritt 4: $T(\lceil n/m \rceil)$
- Schritt 5: $O(n)$
- Schritt 6 bzw. 7: ???

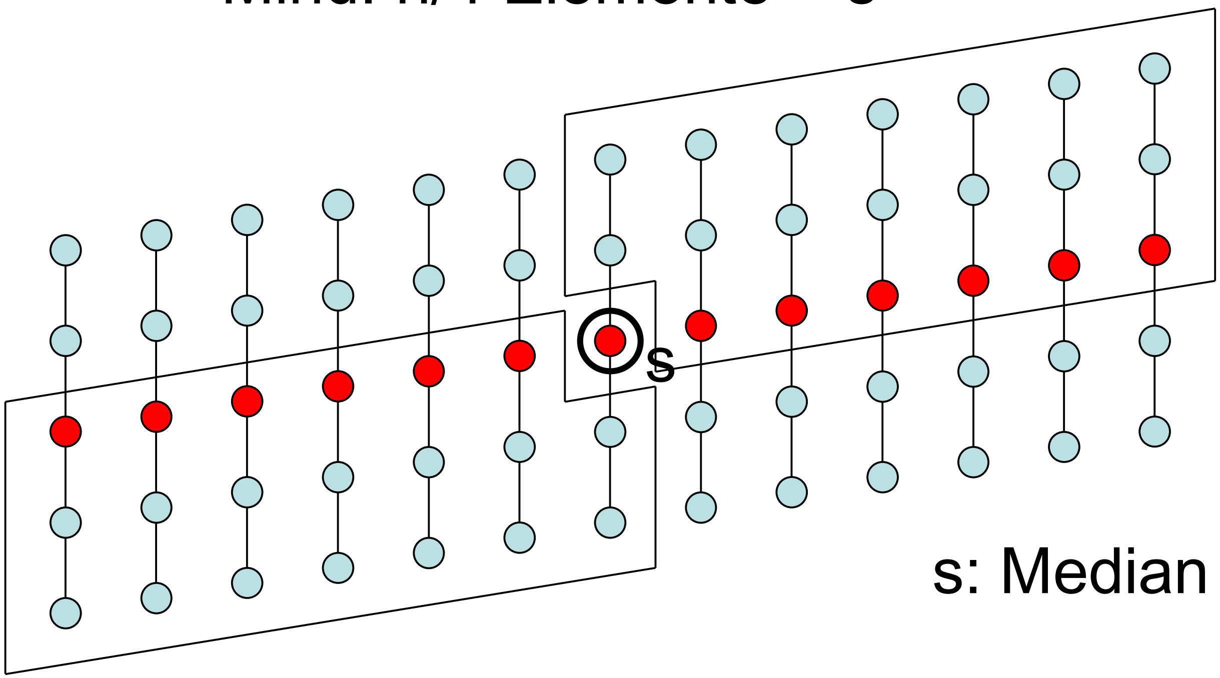
Lemma 18.3: Schritt 6/7 ruft BFPRT mit maximal $\lfloor (3/4)n \rfloor$ Elementen auf

BFPRT-Algorithmus

Beweis: O.B.d.A. sei m=5

Mind. n/4 Elemente > s

: Median



s: Median der Mediane

Mind. n/4 Elemente < s

BFPRT-Algorithmus

Laufzeit für $m=5$:

$$T(n) \leq T(\lfloor (3/4)n \rfloor) + T(\lceil n/5 \rceil) + c \cdot n$$

für eine Konstante c.

Satz 18.4: $T(n) \leq d \cdot n$ für eine Konstante d.

Beweis: Übung.

Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Binary Search
- Arithmische Operationen wie Multiplikation großer Zahlen oder Matrixmultiplikation
- Selektion
- Nächstes-Paar-Problem

Nächstes-Paar-Problem

Nächstes-Paar-Problem:

- Eingabe: Menge S von n Punkten $P_1=(x_1,y_1),\ldots,P_n=(x_n,y_n)$ im 2-dimensionalen Euklidischen Raum
- Ausgabe: Punktpaar mit kürzester Distanz

Annahme: n ist Zweierpotenz

Nächstes-Paar-Problem

Algo für Nächstes-Paar-Problem:

- Sortiere Punkte gemäß x-Koordinate (z.B. Mergesort, Zeit $O(n \log n)$)
- Löse danach Nächstes-Paar-Problem rekursiv durch Algo ClosestPair

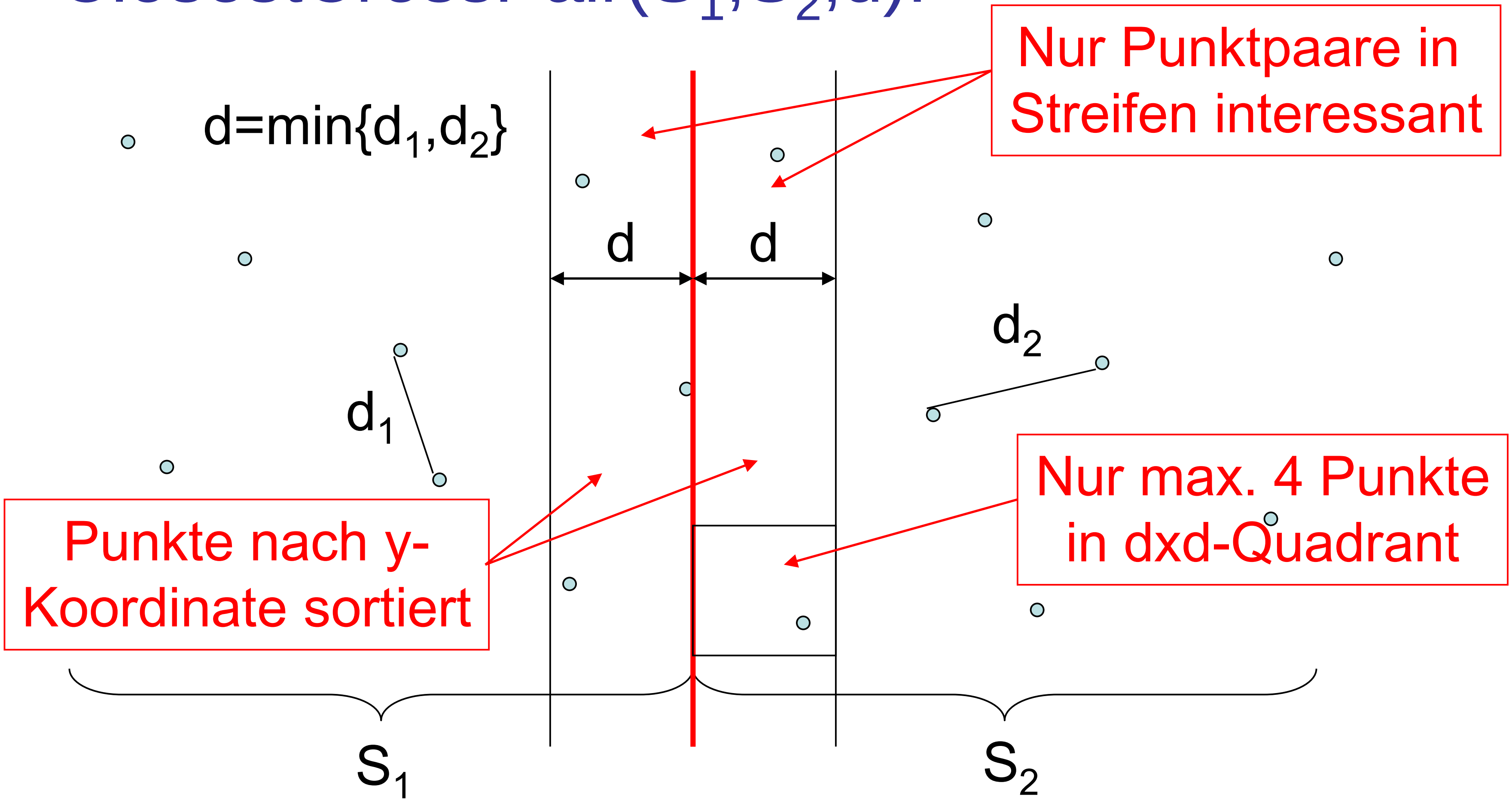
Nächstes-Paar-Problem

Algo ClosestPair(S):

- Eingabe: nach x-Koordinate sortierte Punktmenge S
- $|S|=2$: sortiere S gemäß y-Koordinate und gib Distanz zwischen den Punkten in S zurück
- $|S|>2$:
  - teile S in der Mitte (Position n/2) in S_1 und S_2
  - d_1:=ClosestPair(S_1); d_2:=ClosestPair(S_2)
  - d:=min{ClosestCrossPair(S_1,S_2,min(d_1,d_2)), d_1, d_2}
  - Führe Merge(S_1,S_2) durch, so dass S am Ende nach y-Koordinate sortiert ist (S_1, S_2 bereits nach y sortiert)
  - gib d zurück

Nächstes-Paar-Problem

ClosestCrossPair(S_1,S_2,d):



Nächstes-Paar-Problem

ClosestCrossPair:

- Durchlaufe die (nach der y-Koordinate sortierten) Punkte in S_1 und S_2 von oben nach unten (wie in Merge(S_1,S_2)) und merke die Mengen M_1 und M_2 der 8 zuletzt gesehenen Punkte in S_1 und S_2 im d-Streifen
- Bei jedem neuen Knoten in M_1, berechne Distanzen zu Knoten in M_2, und bei jedem neuen Knoten in M_2, berechne Distanzen zu Knoten in M_1
- Gib am Ende minimal gefundene Distanz zurück

Nächstes-Paar-Problem

Laufzeit für Nächstes-Paar-Algo:

- Mergesort am Anfang: $O(n \log n)$
- Laufzeit $T(n)$ von ClosestPair Algo:

$$T(1)=O(1),\ T(n)=2T(n/2)+O(n)$$

Gesamtlaufzeit: $O(n \log n)$

Brute force: $O(n^2)$