Proseminar
Effiziente Algorithmen

Kapitel 9: Divide & Conquer und Dynamische Programmierung

Prof. Dr. Christian Scheideler

WS 2016

Generische Optimierungsverfahren:

- Systematische Suche
  – lass nichts aus
- Divide and Conquer
  – löse das Ganze in Teilen
- Dynamische Programmierung
  – mache nie etwas zweimal
- Greedy Verfahren
  – schau niemals zurück
- Lokale Suche
  – denke global, handle lokal

Systematische Suche

Prinzip: durchsuche gesamten Lösungsraum

Auch bekannt als „Brute Force“

Vorteil: sehr einfach zu implementieren

Nachteil: sehr zeitaufwendig und sollte daher nur für kleine Instanzen verwendet werden

Systematische Suche

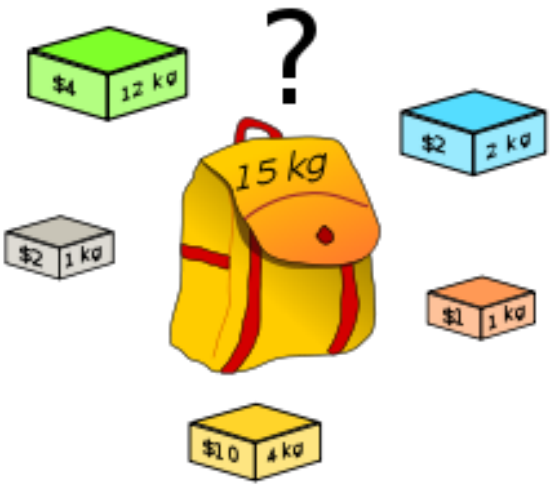
Beispiele:

- Suche in unsortierter Liste
- Suche über Broadcasting in unstruktu-rierten verteilten Systemen (Peer-to-Peer Systeme)
- Rucksackproblem (siehe nächste Folie)

Systematische Suche

Rucksackproblem:

- Eingabe: n Objekte mit Gewichten $w_1,\ldots,w_n$ und Werten $v_1,\ldots,v_n$ und Rucksack mit Kapazität W
- Ausgabe: Objektmenge M maximalen Wertes, die in Rucksack passt



Systematische Suche

Lösung zum Rucksackproblem:

Probiere alle Teilmengen von Objekten aus und merke die Menge M von Objekten mit $\sum_{i \in M} w_i \leq W$, die bisher den maximalen Wert hatte

Aufwand: $O(2^n)$, da es 2^n Möglichkeiten gibt, Teilmengen aus einer n-elementigen Menge zu bilden.

Generische Optimierungsverfahren:

- Systematische Suche
  – lass nichts aus
- Divide and Conquer
- Dynamische Programmierung

} DuA, Kap. 18 und 20

- Greedy Verfahren
  – schau niemals zurück
- Lokale Suche
  – denke global, handle lokal

18. Divide & Conquer

Teile & Herrsche:

- Problem in Teilprobleme aufteilen
- Teilprobleme rekursiv lösen
- Lösung aus Teillösungen zusammensetzen

Probleme:

- Wie setzt man zusammen?
  [erfordert algorithmisches Geschick und Übung]
- Laufzeitanalyse (Auflösen der Rekursion)
  [ist normalerweise nach Standardschema; erfordert ebenfalls Übung]

Divide & Conquer

Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Binary Search
- Arithmische Operationen wie Multiplikation großer Zahlen oder Matrixmultiplikation
- Selektion
- Nächstes-Paar-Problem

Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplikation

$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $C=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 20 & 23 & 29 \\ 14 & 14 & \dots & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Matrix Multiplikation

Teile & Herrsche:

- Problem: Berechne das Produkt zweier n×n Matrizen
- Eingabe: Matrizen X,Y
- Ausgabe: Matrix Z = X·Y

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,4} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & y_{2,4} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & y_{3,4} \\ y_{4,1} & y_{4,2} & y_{4,3} & y_{4,4} \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)

1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]
2. **for** i←1 **to** n **do**
3. **for** j ← 1 **to** n **do**
4. Z[i][j] ← 0
5. **for** k ←1 **to** n **do**
6. Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
7. **return** Z

Matrix Multiplikation

```
MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)                    Laufzeit:
1.   new array Z[1,..,n][1,..,n]                        Θ(n²)
2.   for i←1 to n do
3.       for j ← 1 to n do
4.           Z[i][j] ← 0
5.           for k ←1 to n do
6.               Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
7.   return Z
```

Matrix Multiplikation

```
MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)                    Laufzeit:
1.   new array Z[1,..,n][1,..,n]                       Θ(n²)
2.   for i←1 to n do                                   Θ(n)
3.       for j ← 1 to n do
4.           Z[i][j] ← 0
5.           for k ←1 to n do
6.               Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
7.   return Z
```

Matrix Multiplikation

```
MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)                    Laufzeit:
1.   new array Z[1,..,n][1,..,n]                       Θ(n²)
2.   for i←1 to n do                                   Θ(n)
3.       for j ← 1 to n do                             Θ(n²)
4.           Z[i][j] ← 0
5.           for k ←1 to n do
6.               Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
7.   return Z
```

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**	
6. Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	
7. **return** Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i←1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j ← 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] ← 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k ←1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6. Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]	
7. return Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i←1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j ← 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] ← 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k ←1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6. Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]	$\Theta(n^3)$
7. return Z	

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6. Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	$\Theta(n^3)$
7. return Z	$\Theta(1)$

Matrix Multiplikation

MatrixMultiplikation(Array X, Y, n)	Laufzeit:
1. **new** array Z[1,..,n][1,..,n]	$\Theta(n^2)$
2. **for** i$\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n)$
3. **for** j $\leftarrow$ 1 **to** n **do**	$\Theta(n^2)$
4. Z[i][j] $\leftarrow$ 0	$\Theta(n^2)$
5. **for** k $\leftarrow$1 **to** n **do**	$\Theta(n^3)$
6. Z[i][j] $\leftarrow$ Z[i][j] + X[i][k] $\cdot$ Y[k][j]	$\Theta(n^3)$
7. return Z	$\Theta(1)$
	$\Theta(n^3)$

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$$

Aufwand:

- 8 Multiplikationen von n/2×n/2 Matrizen
- 4 Additionen von n/2×n/2 Matrizen

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Aufwand:

- 8 Multiplikationen von n/2×n/2 Matrizen
- 4 Additionen von n/2×n/2 Matrizen

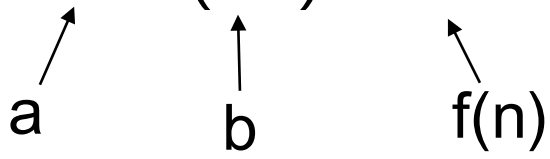
Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



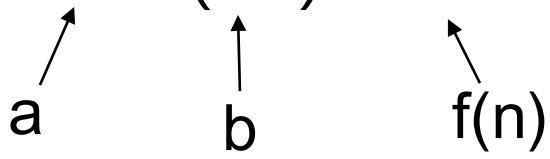
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8, b=2$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



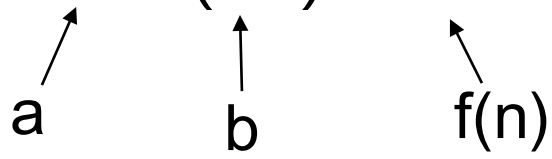
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8, b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



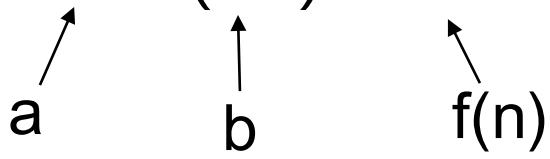
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8, b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$
- Formaler Beweis durch Induktion!!

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=8, b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$
- Formaler Beweis durch Induktion!!
- Nicht besser als einfacher Algorithmus

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche (Algorithmus von Strassen):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$$

Trick:

$P_1 = A \cdot (F-H)$ $\quad P_5 = (A+D) \cdot (E+H)$

$P_2 = (A+B) \cdot H$ $\quad P_6 = (B-D) \cdot (G+H)$

$P_3 = (C+D) \cdot E$ $\quad P_7 = (A-C) \cdot (E+F)$

$P_4 = D \cdot (G-E)$

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche (Algorithmus von Strassen):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$$

Trick:

$P_1 = A \cdot (F-H)$

$P_2 = (A+B) \cdot H$

$P_3 = (C+D) \cdot E$

$P_4 = D \cdot (G-E)$

$P_5 = (A+D) \cdot (E+H)$

$P_6 = (B-D) \cdot (G+H)$

$P_7 = (A-C) \cdot (E+F)$

$AE+BG = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$

$AF+BH = P_1 + P_2$

$CE+DG = P_3 + P_4$

$CF+DH = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

Matrix Multiplikation

Teile und Herrsche:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$$

Trick:

$P_1 = A \cdot (F-H)$

$P_2 = (A+B) \cdot H$

$P_3 = (C+D) \cdot E$

$P_4 = D \cdot (G-E)$

$P_5 = (A+D) \cdot (E+H)$

$P_6 = (B-D) \cdot (G+H)$

$P_7 = (A-C) \cdot (E+F)$

$AE+BG = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$

$AF+BH = P_1 + P_2$

$CE+DG = P_3 + P_4$

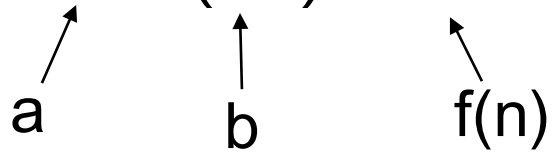
$CF+DH = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

7 Multiplikationen!!!

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



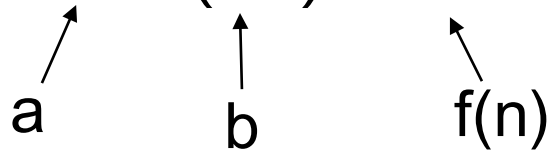
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



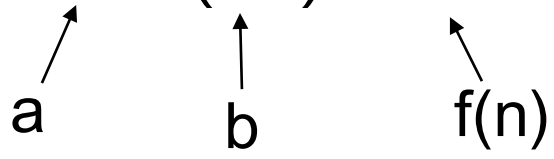
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=7$, $b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a})$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



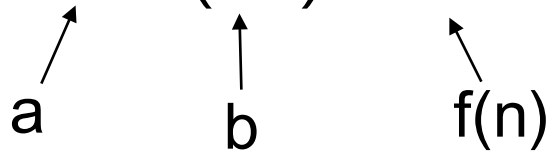
Master Theorem:

- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=7,\ b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7})$

Matrix Multiplikation

Laufzeit:

- $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$



Master Theorem:

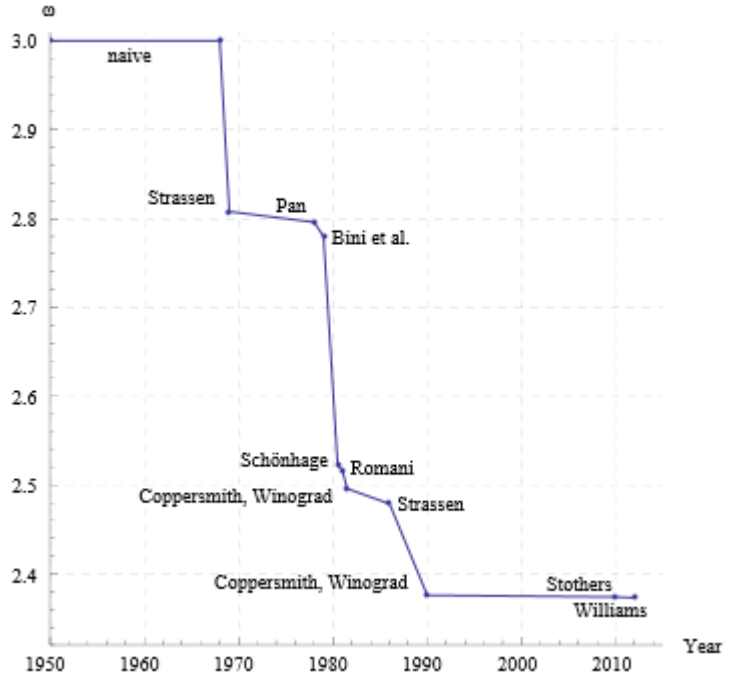
- $f(n) = k \cdot n^2$
- $a=7,\ b=2$
- Fall 1: Laufzeit $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2,81})$
- Verbesserter Algorithmus!
  (Erheblicher Unterschied für große Eingaben)

Matrix Multiplikation

Satz 18.1

Das Produkt zweier n×n Matrizen kann in $\Theta(n^{2,81})$ Laufzeit berechnet werden.

Seitdem verschiedene Verbesserungen:



Divide & Conquer

Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Binary Search
- Arithmische Operationen wie Multiplikation großer Zahlen oder Matrixmultiplikation
- Selektion
- Nächstes-Paar-Problem

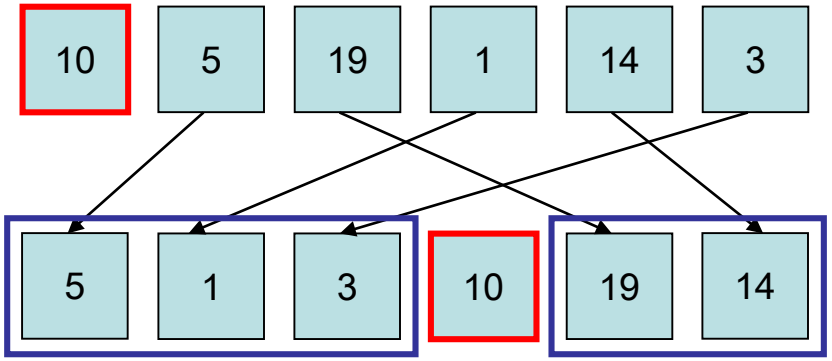
Selektion

Problem: finde k-kleinstes Element in einer Folge von n Elementen

Lösung: sortiere Elemente (z.B. Mergesort), gib k-tes Element aus $\rightarrow$ Zeit $O(n \log n)$

Geht das auch schneller??

Ansatz: verfahre ähnlich zu Quicksort



- j: Position des Pivotelements
- k<j: mach mit linker Teilfolge weiter
- k>j: mach mit rechter Teilfolge weiter

Selektion

```
Quickselect(A,l,r,k)
    ▷ A[l..r]: Restfeld, k: k-kleinstes Element, l≤k≤r
    if r=l then return a[l]
    i←Randomized-Partition(A,l,r)  ▷ siehe Kapitel 6
    if k<i then x←Quickselect(A,l,i-1,k)
    if k>i then x←Quickselect(A,i+1,r,k)
    if k=i then x←a[k]
    return x
```

Zum Vergleich Quicksort(A,l,r):

```
    if l<r then
        i←Partition(A,l,r)
        Quicksort(A,l,i-1)
        Quicksort(A,i+1,r)
```

Quickselect

- C(n): erwartete Anzahl Vergleiche

Satz 18.2: C(n)=O(n)

Beweis:

- Pivot ist gut: keine der Teilfolgen länger als 2n/3
- Sei p=Pr[Pivot ist gut]

- p=1/3

Quickselect

- Pivot gut: Restaufwand $\leq C(2n/3)$
- Pivot schlecht: Restaufwand $\leq C(n)$

$$C(n) \leq n + p \cdot C(2n/3) + (1-p) \cdot C(n)$$

$$\Rightarrow C(n) \leq n/p + C(2n/3)$$

$$\leq 3n + C(2n/3) \leq 3(n+2n/3+4n/9+\ldots)$$

$$\leq 3n \sum_{i \geq 0} (2/3)^i$$

$$\leq 3n / (1-2/3) = 9n$$

BFPRT-Algorithmus

Gibt es auch einen deterministischen Selektionsalgorithmus mit linearer Laufzeit?

Ja, den BFPRT-Algorithmus (benannt nach den Erfindern Blum, Floyd, Pratt, Rivest und Tarjan).

BFPRT-Algorithmus

- Sei m eine ungerade Zahl ($5 \leq m \leq 21$).
- Betrachte die Zahlenmenge $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$.
- Gesucht: k-kleinste Zahl in S

Algorithmus BFPRT(S,k):

1. Teile S in $\lceil n/m \rceil$ Blöcke auf, davon $\lfloor n/m \rfloor$ mit m Elementen
2. Sortiere jeden dieser Blöcke (z.B. mit Insertionsort)
3. $S' :=$ Menge der $\lceil n/m \rceil$ Mediane der Blöcke.
4. $m \leftarrow$ BFPRT($S', \lceil |S'|/2 \rceil$) ▷ berechnet Median der Mediane
5. $S_1 \leftarrow \{ x \in S \mid x<m \}$; $S_2 \leftarrow \{x \in S \mid x>m\}$
6. if $k \leq |S_1|$ then return BFPRT(S_1,k)
7. if $k>|S_1|+1$ then return BFPRT(S_2,$k-|S_1|-1$)
8. return m

BFPRT-Algorithmus

- Sei m eine ungerade Zahl ($5 \leq m \leq 21$).
- Betrachte die Zahlenmenge $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$.
- Gesucht: k-kleinste Zahl in S

Median: Wert in der Mitte einer sortierten Folge

Algorithmus BFPRT(S,k):

1. Teile S in $\lceil n/m \rceil$ Blöcke auf, da[illegible]$/m\rceil$ mit m Elementen
2. Sortiere jeden dieser Blöcke (z.B. mit Insertionsort)
3. S':= Menge der $\lceil n/m \rceil$ Mediane der Blöcke.
4. $m \leftarrow$ BFPRT($S', \lceil |S'|/2 \rceil$) ▷ berechnet Median der Mediane
5. $S_1 \leftarrow \{ x \in S \mid x<m\}$; $S_2 \leftarrow \{x \in S \mid x>m\}$
6. if $k \leq |S_1|$ then return BFPRT(S_1,k)
7. if $k>|S_1|+1$ then return BFPRT(S_2,$k-|S_1|-1$)
8. return m

BFPRT-Algorithmus

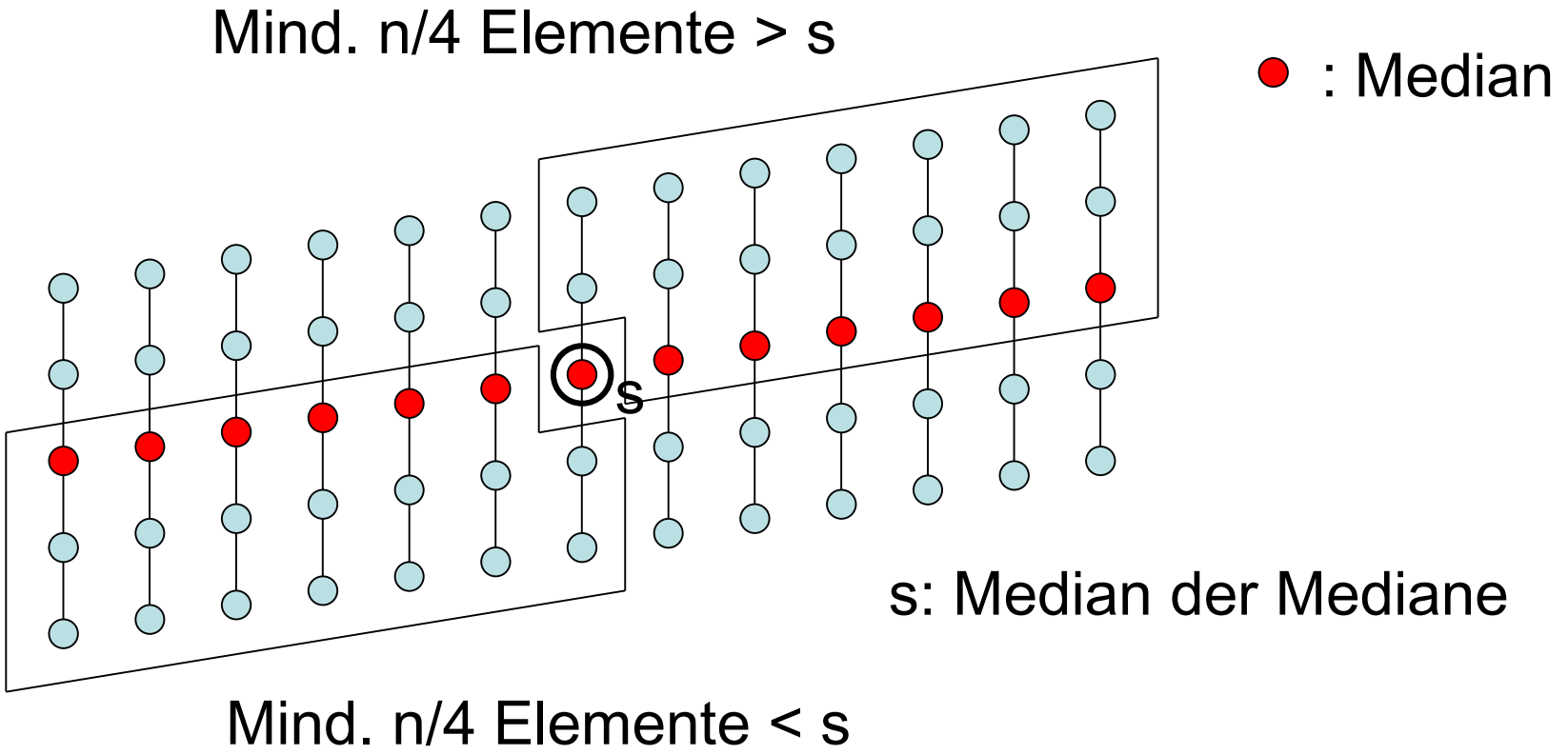
Laufzeit $T(n)$ des BFPRT-Algorithmus:

- Schritte 1-3: $O(n)$
- Schritt 4: $T(\lceil n/m \rceil)$
- Schritt 5: $O(n)$
- Schritt 6 bzw. 7: ???

Lemma 18.3: Schritt 6/7 ruft BFPRT mit maximal $\lfloor (3/4)n \rfloor$ Elementen auf

BFPRT-Algorithmus

Beweis: O.B.d.A. sei m=5



BFPRT-Algorithmus

Laufzeit für $m=5$:

$$T(n) \leq T(\lfloor (3/4)n \rfloor) + T(\lceil n/5 \rceil) + c \cdot n$$

für eine Konstante c.

Satz 18.4: $T(n) \leq d \cdot n$ für eine Konstante d.

Beweis: Übung.

Divide & Conquer

Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Binary Search
- Arithmische Operationen wie Multiplikation großer Zahlen oder Matrixmultiplikation
- Selektion
- Nächstes-Paar-Problem

Nächstes-Paar-Problem

Nächstes-Paar-Problem:

- Eingabe: Menge S von n Punkten $P_1=(x_1,y_1),\ldots,P_n=(x_n,y_n)$ im 2-dimensionalen Euklidischen Raum
- Ausgabe: Punktpaar mit kürzester Distanz

Annahme: n ist Zweierpotenz

Nächstes-Paar-Problem

Algo für Nächstes-Paar-Problem:

- Sortiere Punkte gemäß x-Koordinate (z.B. Mergesort, Zeit O(n log n))
- Löse danach Nächstes-Paar-Problem rekursiv durch Algo ClosestPair

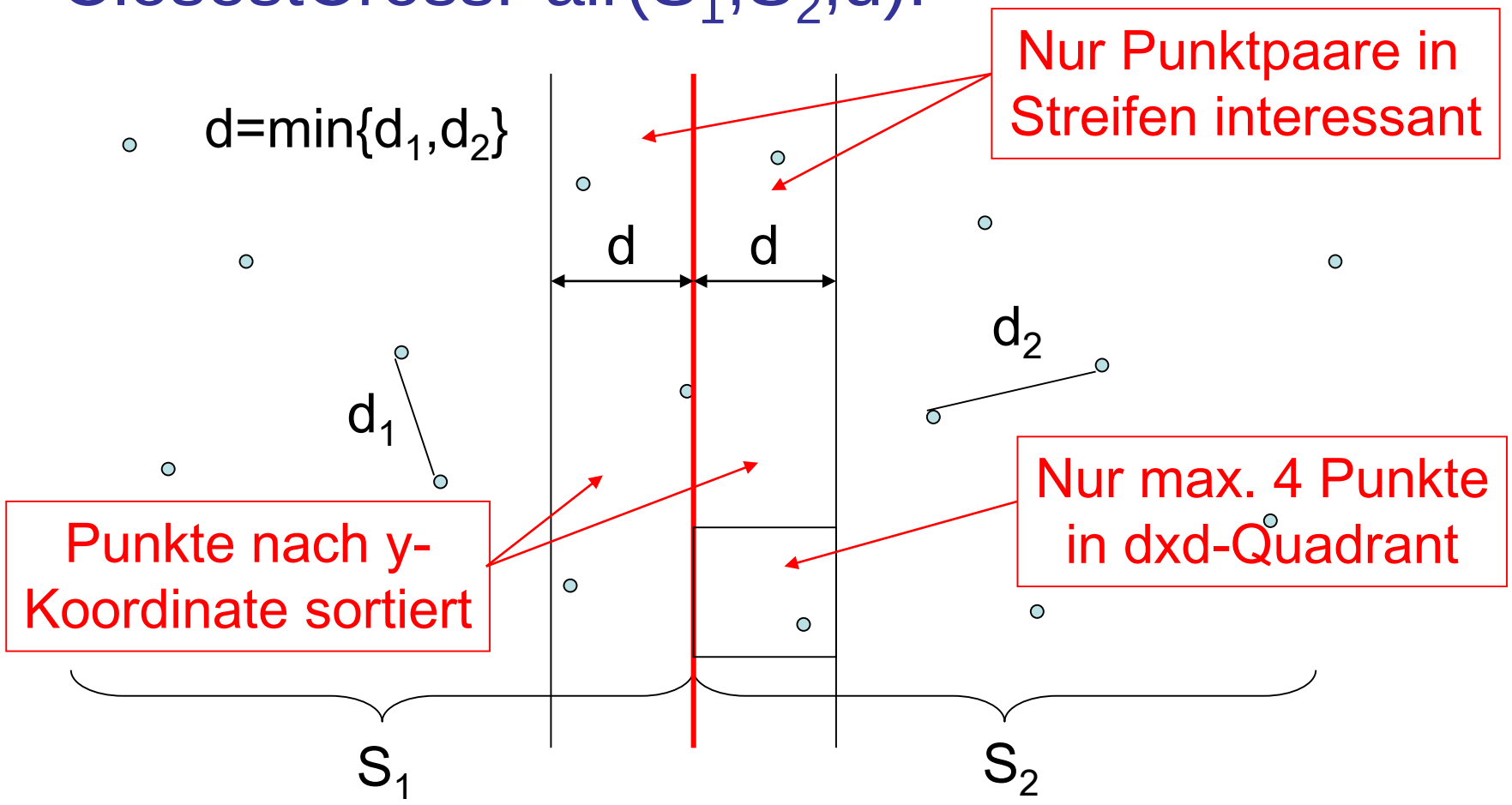
Nächstes-Paar-Problem

Algo ClosestPair(S):

- Eingabe: nach x-Koordinate sortierte Punktmenge S
- |S|=2: sortiere S gemäß y-Koordinate und gib Distanz zwischen den Punkten in S zurück
- |S|>2:
  - teile S in der Mitte (Position n/2) in S_1 und S_2
  - d_1:=ClosestPair(S_1); d_2:=ClosestPair(S_2)
  - d:=min{ClosestCrossPair(S_1,S_2,min(d_1,d_2)), d_1, d_2}
  - Führe Merge(S_1,S_2) durch, so dass S am Ende nach y-Koordinate sortiert ist (S_1, S_2 bereits nach y sortiert)
  - gib d zurück

Nächstes-Paar-Problem

ClosestCrossPair(S_1,S_2,d):



Nächstes-Paar-Problem

ClosestCrossPair:

- Durchlaufe die (nach der y-Koordinate sortierten) Punkte in S_1 und S_2 von oben nach unten (wie in Merge(S_1,S_2)) und merke die Mengen M_1 und M_2 der 8 zuletzt gesehenen Punkte in S_1 und S_2 im d-Streifen
- Bei jedem neuen Knoten in M_1, berechne Distanzen zu Knoten in M_2, und bei jedem neuen Knoten in M_2, berechne Distanzen zu Knoten in M_1
- Gib am Ende minimal gefundene Distanz zurück

Nächstes-Paar-Problem

Laufzeit für Nächstes-Paar-Algo:

- Mergesort am Anfang: $O(n \log n)$
- Laufzeit $T(n)$ von ClosestPair Algo:

$$T(1)=O(1),\ T(n)=2T(n/2)+O(n)$$

Gesamtlaufzeit: $O(n \log n)$

Brute force: $O(n^2)$

Generische Optimierungsverfahren:

- Systematische Suche
  – lass nichts aus
- Divide and Conquer
- Dynamische Programmierung

} DuA, Kap. 18 und 20

- Greedy Verfahren
  – schau niemals zurück
- Lokale Suche
  – denke global, handle lokal

20. Dynamische Programmierung

Gierige Algorithmen:

- Berechne Lösung schrittweise
- In jedem Schritt mache lokal optimale Wahl

Anwendbar:

- Wenn optimale Lösung eines Problems optimale Lösung von Teilproblemen enthält

Algorithmen:

- Scheduling Probleme
- Optimale Präfix-Kodierung (Huffman Codes)

Dynamische Programmierung

Rekursiver Ansatz:

- Lösen eines Problems durch Lösen mehrerer kleinerer Teilprobleme, aus denen sich die Lösung für das Ausgangsproblem zusammensetzt

Phänomen:

- Mehrfachberechnungen von Lösungen

Methode:

- Lösungen zu Teilproblemen werden iterativ beginnend mit den Lösungen der kleinsten Teilprobleme berechnet (*bottom-up*).
- Speichern einmal berechneter Lösungen in einer Tabelle

Dynamische Programmierung

Typische Anwendung für dynamisches Programmieren: *Optimierungsprobleme*

Eine optimale Lösung für das Ausgangsproblem setzt sich aus *optimalen* Lösungen für kleinere Probleme zusammen.

Dynamische Programmierung

Mit Greedy-Algorithmen:

- Algorithmenmethode, um Optimierungsprobleme zu lösen

Mit Divide-&-Conquer:

- Lösung eines Problems aus Lösungen zu Teilproblemen
- Aber: Lösungen zu Teilproblemen werden *nicht* rekursiv gelöst.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ zwei Folgen, wobei $x_i, y_j \in A$ für ein endliches Alphabet A.
- Dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1,...,i_n$ gibt mit $x_{ij} = y_j$ für j = 1,...,n.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ zwei Teilfolgen, wobei $x_i, y_j \in A$ für ein endliches Alphabet A.
- Dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1,...,i_n$ gibt mit $x_{ij} = y_j$ für j = 1,...,n.

Beispiel:

Folge Y	B	C	A	C

Folge X	A	B	A	C	A	B	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ zwei Teilfolgen, wobei $x_i, y_j \in A$ für ein endliches Alphabet A.
- Dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1,...,i_n$ gibt mit $x_{ij} = y_j$ für j = 1,...,n.

Beispiel:

Folge Y

B	C	A	C

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ zwei Teilfolgen, wobei $x_i, y_j \in A$ für ein endliches Alphabet A.
- Dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1,...,i_n$ gibt mit $x_{ij} = y_j$ für j = 1,...,n.

Beispiel:

Folge Y

B	C	A	C

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ zwei Teilfolgen, wobei $x_i, y_j \in A$ für ein endliches Alphabet A.
- Dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1,...,i_n$ gibt mit $x_{ij} = y_j$ für j = 1,...,n.

Beispiel:

Folge Y

B	C	A	C

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ zwei Teilfolgen, wobei $x_i, y_j \in A$ für ein endliches Alphabet A.
- Dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1,...,i_n$ gibt mit $x_{ij} = y_j$ für j = 1,...,n.

Beispiel:

Folge Y

B	C	A	C

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

- Y ist Teilfolge von X, Wähle $(i_1,i_2,i_3,i_4) = (2,4,5,7)$

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z Teilfolge sowohl von X als auch von Y ist.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z Teilfolge sowohl von X als auch von Y ist.

Beispiel:

Folge Z	B	C	A	C			
Folge X	A	B	A	C	A	B	C
Folge Y	B	A	C	C	A	B	B	C

- Z ist gemeinsame Teilfolge von X und Y

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z Teilfolge sowohl von X als auch von Y ist.

Beispiel:

Folge Z

B	C	A	C

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

Folge Y

B	A	C	C	A	B	B	C

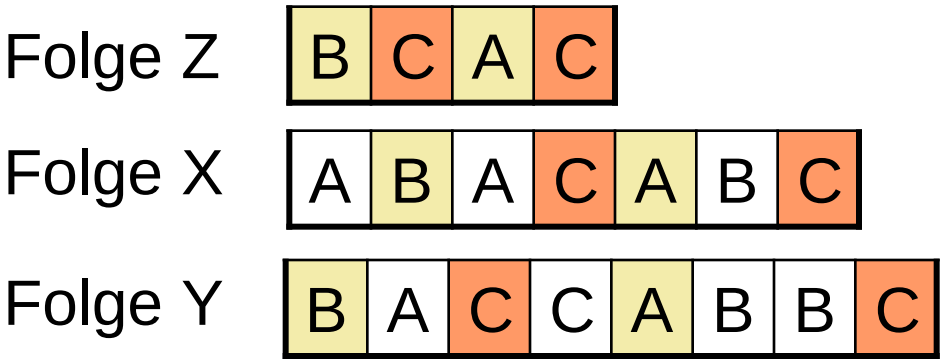
- Z ist gemeinsame Teilfolge von X und Y

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z Teilfolge sowohl von X als auch von Y ist.

Beispiel:



- Z ist gemeinsame Teilfolge von X und Y

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z längste gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z gemeinsame Teilfolge von X und Y ist und es keine andere gemeinsame Teilfolge von X und Y gibt, die größere Länge als Z besitzt.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z längste gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z gemeinsame Teilfolge von X und Y ist und es keine andere gemeinsame Teilfolge von X und Y gibt, die größere Länge als Z besitzt.

Beispiel:

Folge X	A	B	A	C	A	B	C

Folge Y	B	A	C	C	A	B	B	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z längste gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z gemeinsame Teilfolge von X und Y ist und es keine andere gemeinsame Teilfolge von X und Y gibt, die größere Länge als Z besitzt.

Beispiel:

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

Folge Y

B	A	C	C	A	B	B	C

Folge Z_1

B	C	A	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Definition:

- Seien X, Y, Z Folgen über A.
- Dann heißt Z längste gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z gemeinsame Teilfolge von X und Y ist und es keine andere gemeinsame Teilfolge von X und Y gibt, die größere Länge als Z besitzt.

Beispiel:

Folge X

A	B	A	C	A	B	C

Folge Y

B	A	C	C	A	B	B	C

Folge Z_1

B	C	A	C

Längste Teilfolge hat Länge 6

Folge Z_2

B	A	C	A	C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Eingabe:

- Folge $X=(x_1,...,x_m)$
- Folge $Y=(y_1,...,y_n)$

Ausgabe:

- Längste gemeinsame Teilfolge Z
  (**L**ongest **C**ommon **S**ubsequenz)

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Eingabe:

- Folge $X=(x_1,...,x_m)$
- Folge $Y=(y_1,...,y_n)$

Ausgabe:

- Längste gemeinsame Teilfolge Z
  (**L**ongest **C**ommon **S**ubsequenz)

Beispiel:

Folge X

A	B	C	B	D	A	B

Folge Y

B	D	C	A	B	A

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Algorithmus:

- Erzeuge alle möglichen Teilfolgen von X
- Teste für jede Teilfolge von X, ob auch Teilfolge von Y
- Merke zu jedem Zeitpunkt bisher längste gemeinsame Teilfolge

Laufzeit:

- 2^m mögliche Teilfolgen
- Exponentielle Laufzeit!

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Satz 20.1:

Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ beliebige Folgen und sei $Z=(z_1,...,z_k)$ eine längste gemeinsame Teilfolge von X und Y. Dann gilt

1. Ist $x_m = y_n$, dann ist $z_k = x_m = y_n$ und $(z_1,...,z_{k-1})$ ist eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und $(y_1,...,y_{n-1})$.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Satz 20.1:

Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ beliebige Folgen und sei $Z=(z_1,...,z_k)$ eine längste gemeinsame Teilfolge von X und Y. Dann gilt

1. Ist $x_m = y_n$, dann ist $z_k = x_m = y_n$ und $(z_1,...,z_{k-1})$ ist eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und $(y_1,...,y_{n-1})$.
2. Ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq x_m$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und Y.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Satz 20.1:

Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ beliebige Folgen und sei $Z=(z_1,...,z_k)$ eine längste gemeinsame Teilfolge von X und Y. Dann gilt

1. Ist $x_m = y_n$, dann ist $z_k = x_m = y_n$ und $(z_1,...,z_{k-1})$ ist eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und $(y_1,...,y_{n-1})$.
2. Ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq x_m$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und Y.
3. Ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq y_n$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von X und $(y_1,...,y_{n-1})$.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Satz 20.1:

Seien $X=(x_1,...,x_m)$ und $Y=(y_1,...,y_n)$ beliebige Folgen und sei $Z=(z_1,...,z_k)$ eine längste gemeinsame Teilfolge von X und Y. Dann gilt

1. Ist $x_m = y_n$, dann ist $z_k = x_m = y_n$ und $(z_1,...,z_{k-1})$ ist eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und $(y_1,...,y_{n-1})$.
2. Ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq x_m$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von $(x_1,...,x_{m-1})$ und Y.
3. Ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq y_n$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von X und $(y_1,...,y_{n-1})$.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Lemma 20.2:

Sei C[i][j] die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge von $(x_1,...,x_i)$ und $(y_1,...,y_j)$. Dann gilt:

$$C[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \end{cases}$$

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Lemma 20.2:

Sei C[i][j] die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge von $(x_1,...,x_i)$ und $(y_1,...,y_j)$. Dann gilt:

$$C[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ C[i-1][j-1]+1 & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i = y_j \end{cases}$$

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Lemma 20.2:

Sei C[i][j] die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge von $(x_1,...,x_i)$ und $(y_1,...,y_j)$. Dann gilt:

$$C[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ C[i-1][j-1]+1 & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i = y_j \\ \max\{C[i-1][j], C[i][j-1]\} & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Lemma 20.2:

Sei C[i][j] die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge von $(x_1,...,x_i)$ und $(y_1,...,y_j)$. Dann gilt:

$$C[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ C[i-1][j-1]+1 & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i = y_j \\ \max\{C[i-1][j], C[i][j-1]\} & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Beobachtung:

Rekursive Berechnung der C[i][j] würde zu Berechnung immer wieder derselben Werte führen. Dieses ist ineffizient. Berechnen daher die Werte C[i][j] iterativ, nämlich zeilenweise.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

LCS-Länge(Array X, Y)

1. m ← length[X]
2. n ← length[Y]
3. **new** array C[0,..,m][0,..,n]
4. **for** i ← 0 **to** m **do** C[i][0] ← 0
5. **for** j ← 0 **to** n **do** C[0][j] ← 0
6. **for** i ← 1 **to** m **do**
7. **for** j ← 1 **to** n **do**
8. ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9. **return** C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

LCS-Länge(Array X, Y)

1. m ← length[X]
2. n ← length[Y]
3. **new** array C[0,..,m][0,..,n]
4. **for** i ← 0 **to** m **do** C[i][0] ← 0
5. **for** j ← 0 **to** n **do** C[0][j] ← 0
6. **for** i ← 1 **to** m **do**
7. **for** j ← 1 **to** n **do**
8. ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9. **return** C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

LCS-Länge(Array X, Y)

1. m ← length[X]
2. n ← length[Y]
3. **new** array C[0,..,m][0,..,n]
4. **for** i ← 0 **to** m **do** C[i][0] ← 0
5. **for** j ← 0 **to** n **do** C[0][j] ← 0
6. **for** i ← 1 **to** m **do**
7. **for** j ← 1 **to** n **do**
8. ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9. **return** C

Tabelle für die C[i][j] Werte anlegen.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

```
LCS-Länge(Array X, Y)
1.    m ← length[X]
2.    n ← length[Y]
3.    new array C[0,..,m][0,..,n]
4.    for i ← 0 to m do C[i][0] ← 0
5.    for j ← 0 to n do C[0][j] ← 0
6.    for i ← 1 to m do
7.        for j ← 1 to n do
8.            ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9.    return C
```

Erste Spalte der Tabelle auf 0 setzen.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

```
LCS-Länge(Array X, Y)
1.    m ← length[X]
2.    n ← length[Y]
3.    new array C[0,..,m][0,..,n]
4.    for i ← 0 to m do C[i][0] ← 0
5.    for j ← 0 to n do C[0][j] ← 0
6.    for i ← 1 to m do
7.        for j ← 1 to n do
8.            ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9.    return C
```

Erste Reihe der Tabelle auf 0 setzen.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

```
LCS-Länge(Array X, Y)
1.    m ← length[X]
2.    n ← length[Y]
3.    new array C[0,..,m][0,..,n]
4.    for i ← 0 to m do C[i][0] ← 0
5.    for j ← 0 to n do C[0][j] ← 0
6.    for i ← 1 to m do
7.        for j ← 1 to n do
8.            ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9.    return C
```

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Längenberechnung(Array X, Y, C, i, j)

1. **if** $x_i = y_j$ **then** C[i][j] ← C[i-1][j-1] +1
2. **else**
3. **if** C[i-1][j] ≥ C[i][j-1] **then** C[i][j] ← C[i-1][j]
4. **else** C[i][j] ← C[i][j-1]

$$C[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ C[i-1][j-1]+1 & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i = y_j \\ \max\{C[i-1][j], C[i][j-1]\} & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Längenberechnung(Array X, Y, C, i, j)

1. **if** $x_i = y_j$ **then** C[i][j] ← C[i-1][j-1] +1
2. **else**
3. **if** C[i-1][j] ≥ C[i][j-1] **then** C[i][j] ← C[i-1][j]
4. **else** C[i][j] ← C[i][j-1]

$$C[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ C[i-1][j-1]+1 & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i = y_j \\ \max\{C[i-1][j], C[i][j-1]\} & \text{falls } i, j > 0 \text{ und } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

LCS-Länge(Array X, Y)

1. m ← length[X]
2. n ← length[Y]
3. **new** array C[0,..,m][0,..,n]
4. **for** i ← 0 **to** m **do** C[i][0] ← 0
5. **for** j ← 0 **to** n **do** C[0][j] ← 0
6. **for** i ← 1 **to** m **do**
7. **for** j ← 1 **to** n **do**
8. ➢ Längenberechnung(X, Y, C, i, j)
9. **return** C

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i							
1	A							
2	B							
3	C							
4	B							
5	D							
6	A							
7	B							

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0						
1	A	0						
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0						
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0						
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0						
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0					
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0					
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0					
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0				
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0			
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0			
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0			
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1		
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1		
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1		
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i		j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j		B	D	C	A	B	A
0	x_i		0	0	0	0	0	0	0
1	A		0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	
2	B		0						
3	C		0						
4	B		0						
5	D		0						
6	A		0						
7	B		0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1					
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1				
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1			
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
	y_j		B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
	y_j		B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

i	j	0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Lemma 20.3:

Der Algorithmus LCS-Länge hat Laufzeit O(nm), wenn die Folgen X,Y Länge n und m haben.

Lemma 20.4:

Die Ausgabe der längsten gemeinsamen Teilfolge anhand der Tabelle hat Laufzeit O(n+m), wenn die Folgen X,Y Länge n und m haben.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

1. Bestimme rekursive Struktur einer optimalen Lösung.

2. Entwerfe rekursive Methode zur Bestimmung des Wertes einer optimalen Lösung.

3. Transformiere rekursive Methode in eine iterative Methode zur Bestimmung des Wertes einer optimalen Lösung.

4. Bestimme aus dem Wert einer optimalen Lösung und den in 3. berechneten Zusatzinformationen eine optimale Lösung.

Dynamische Programmierung
Längste gemeinsame Teilfolge

Algorithmenentwurfstechnik:

- Oft bei Optimierungsproblemen angewandt

Einsatz:

- Bei rekursiven Problemlösungen, wenn Teillösungen mehrfach benötigt werden

Lösungsansatz:

- Tabellieren von Teilergebnissen

Vorteil:

- Laufzeitverbesserungen, oft polynomiell statt exponentiell

Fraktionales Rucksack-Problem

- Gegeben sind n Gegenstände. Der i-te Gegenstand besitzt Wert v_i und Gewicht g_i. Ausserdem ist eine Gewichtsschranke W gegeben.

- Zulässige Lösungen sind Zahlen $a_i \in [0,1]$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \leq W.$$

- Gesucht ist eine zulässige Lösung $a_1,\ldots,a_n$ mit möglichst großem Gesamtwert

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Gierige Lösung des fraktionalen Rucksack-Problems

Algorithmus Gieriges-Einpacken:

1. Sortiere die Verhältnisse v_i/g_i absteigend. Sei

$$v_{\pi(1)}/g_{\pi(1)} \geq v_{\pi(2)}/g_{\pi(2)} \geq \cdots v_{\pi(n)}/g_{\pi(n)}$$

   für Permutation π auf (1,…,n).

2. Bestimme maximales k, so dass noch gilt $\sum_{i=1}^{k} g_{\pi(i)} \leq W$.

3. Setze $a_{\pi(1)} = a_{\pi(2)} = \cdots = a_{\pi(k)} = 1$ und setze

$$a_{\pi(k+1)} = \frac{W - \sum_{i=1}^{k} g_{\pi(i)}}{g_{\pi(k+1)}}.$$

   Alle anderen a_i setze auf 0.

Gieriges Einpacken ist optimal

Satz 20.5: Gieriges Einpacken löst das fraktionale Rucksackproblem optimal.

Beweis:

- zerlege Gegenstand i in g_i Stücke mit Wert v_i/g_i.
- betrachte das Tupel (M,T), wobei M die Menge aller Stücke der Gegenstände ist und T die Menge aller Teilmengen von M der Größe maximal W ist
- (M,T) ist offensichtlich ein Matroid
- Ergebnis des generischen Greedy Algorithmus stimmt mit Lösung auf voriger Folie überein, diese Lösung ist also optimal

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Das Rucksackproblem:

- Rucksack mit begrenzter Kapazität
- Objekte mit unterschiedlichem Wert und unterschiedlicher Größe
- Wir wollen Objekte von möglichst großem Gesamtwert mitnehmen

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

- Rucksackgröße 6

Größe	5	2	1	3	7	4
Wert	11	5	2	8	14	9

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

- Rucksackgröße 6

Größe	5	2	1	3	7	4
Wert	11	5	2	8	14	9

- Objekt 1 und 3 passen und haben Gesamtwert 13
- Optimal?

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

- Rucksackgröße 6

Größe	5	2	1	3	7	4
Wert	11	5	2	8	14	9

- Objekt 1 und 3 passen und haben Gesamtwert 13
- Optimal?
- Objekt 2, 3 und 4 passen und haben Gesamtwert 15 !

Das Rucksackproblem (Optimierungsversion):

- Eingabe: n Objekte {1,…,n};
  Objekt i hat ganzz. pos. Größe g[i] und Wert v[i];
  Rucksackkapazität W
- Ausgabe: Menge $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ mit $\sum_{i \in S} g[i] \leq W$ und
  maximalem Wert $\sum_{i \in S} v[i]$

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Herleiten einer Rekursion:

- Sei O optimale Lösung
- Bezeichne Opt(i,w) den Wert einer optimalen Lösung aus Objekten 1 bis i bei Rucksackgröße w

Unterscheide, ob Objekt n in O ist:

- Fall 1(n nicht in O):
  Opt(n,W) = Opt(n-1,W)
- Fall 2 (n in O):
  Opt(n,W) = v[n] + Opt(n-1,W-g[n])

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Rekursion:

- Opt(i,0)= 0 für $0 \leq i \leq n$
- Opt(0,i)= 0 für $0 \leq i \leq W$
- Wenn w<g[i] dann Opt(i,w) = Opt(i-1,w)
- Sonst,
  Opt(i,w) = max{Opt(i-1,w), v[i] + Opt(i-1,w-g[i])}

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Rekursion:

- Opt(i,0)= 0 für $0 \leq i \leq n$
- Opt(0,i)= 0 für $0 \leq i \leq W$
- Wenn w<g[i] dann Opt(i,w) = Opt(i-1,w)
- Sonst,
  Opt(i,w) = max{Opt(i-1,w), v[i] + Opt(i-1,w-g[i])}

Kein Objekt passt in den Rucksack

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Rekursion:

- Opt(i,0)= 0 für $0 \leq i \leq n$
- Opt(0,i)= 0 für $0 \leq i \leq W$
- Wenn w<g[i] dann Opt(i,w) = Opt(i-1,w)
- Sonst,
  Opt(i,w) = max{Opt(i-1,w), v[i] + Opt(i-1,w-g[i])}

Kein Objekt steht zur Auswahl

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Rekursion:

- Opt(i,0)= 0 für $0 \leq i \leq n$
- Opt(0,i)= 0 für $0 \leq i \leq W$
- Wenn w<g[i] dann Opt(i,w) = Opt(i-1,w)
- Sonst,
  Opt(i,w) = max{Opt(i-1,w), v[i] + Opt(i-1,w-g[i])}

Passt aktuelles Objekt in den Rucksack?

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Rekursion:

- Opt(i,0)= 0 für $0 \leq i \leq n$
- Opt(0,i)= 0 für $0 \leq i \leq W$
- Wenn w<g[i] dann Opt(i,w) = Opt(i-1,w)
- Sonst,
  Opt(i,w) = max{Opt(i-1,w), v[i] + Opt(i-1,w-g[i])}

Sonst, verwende Rekursion

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Rucksack(n,W)

1. Initialisiere Feld A[0,..,n][0,..,W] mit A[0,i] =0 für alle $0 \leq i \leq n$ und A[j,0]=0 für alle $0 \leq i \leq W$
2. **for** i $\leftarrow$ 1 **to** n **do**
3. **for** j $\leftarrow$ 1 **to** W **do**
4. Berechne A[i,j] nach Rekursion
5. **return** A[n,W]

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
1	0								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
1	0	0	0	0	0				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

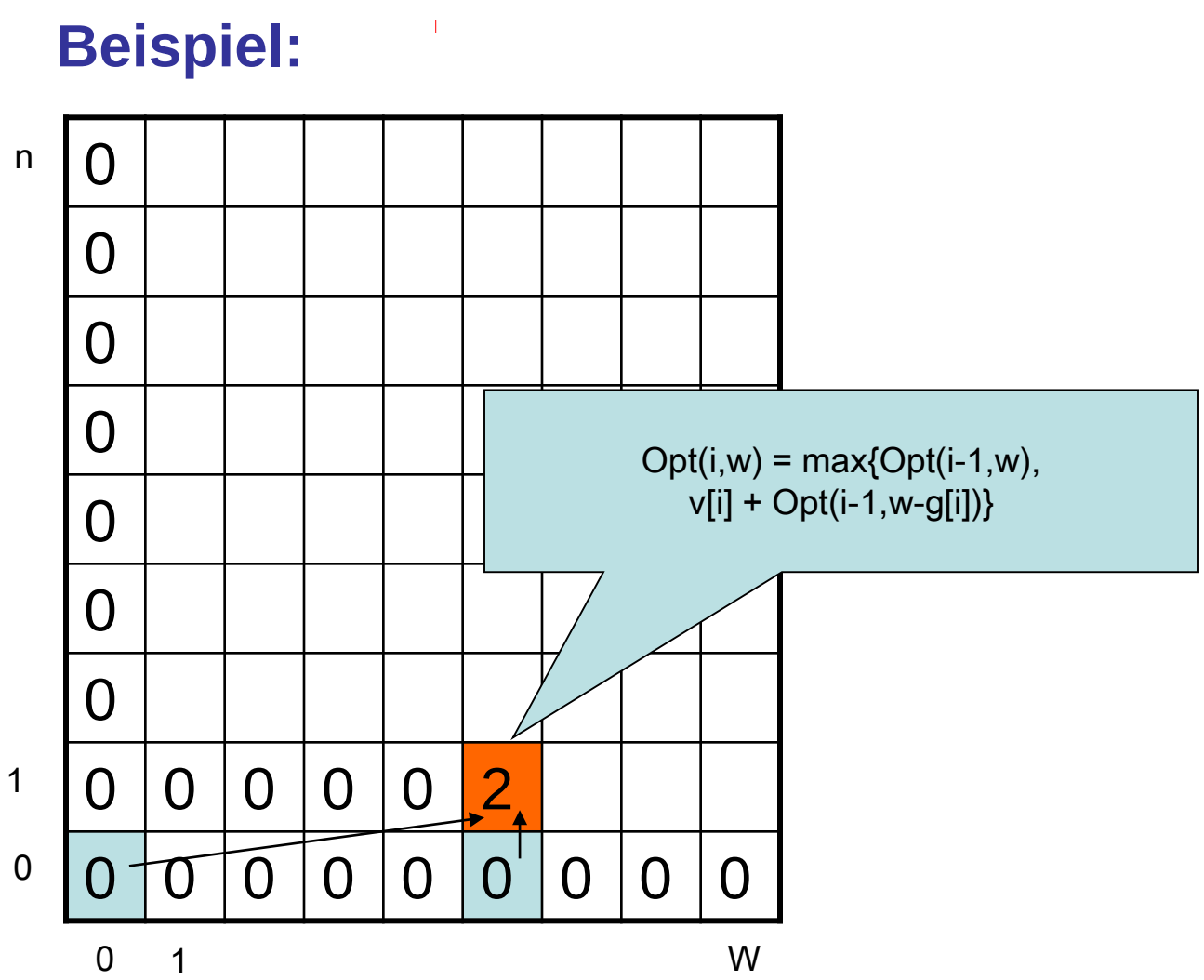
g[1]>W:
Also Opt(i,w) = Opt(i-1,w)

Größe, Wert

	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

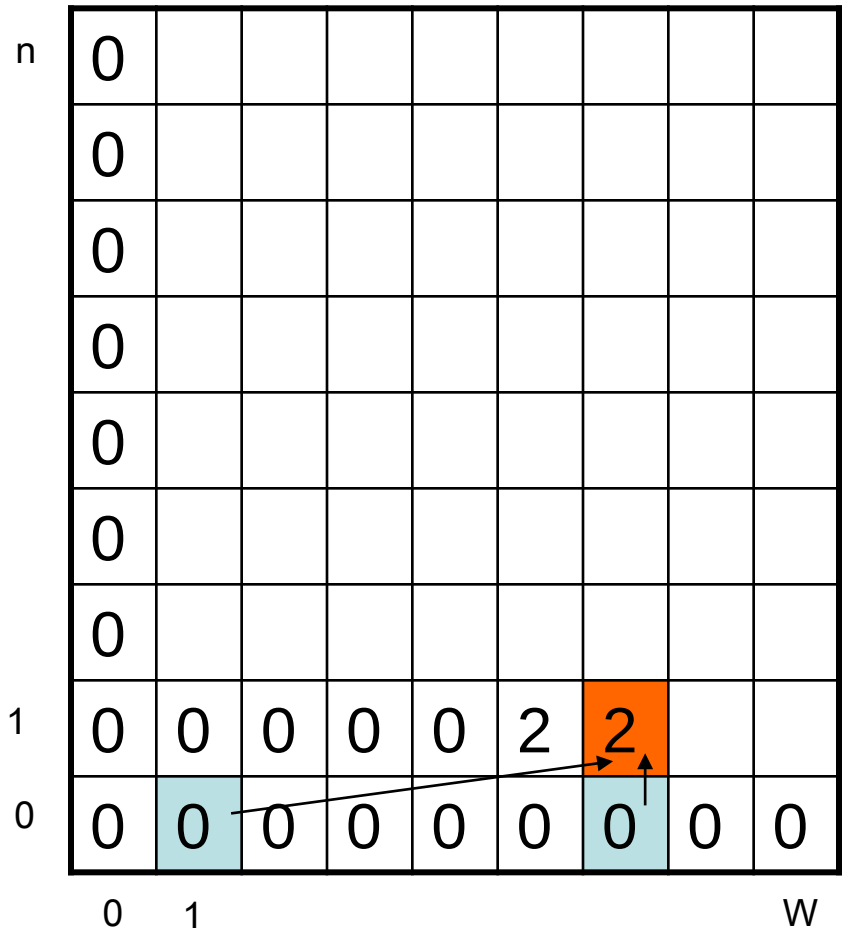
Beispiel:



	Größe (g)	Wert (v)
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

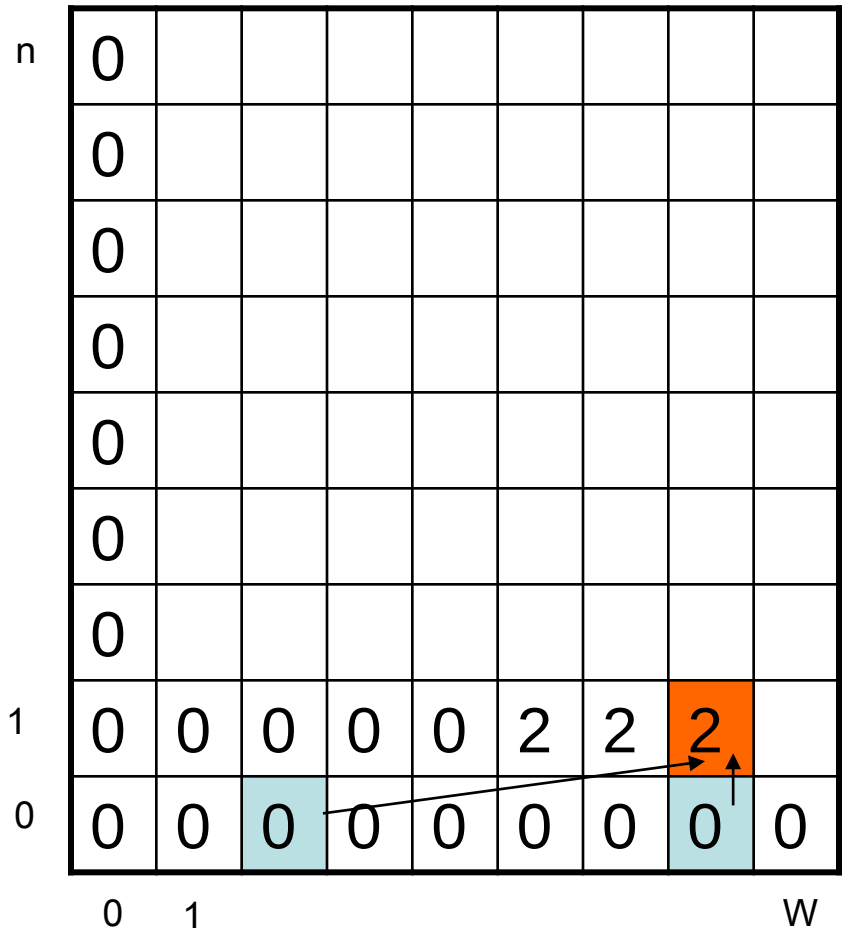


	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Größe Wert

Dynamisches Programmieren – Rucksack

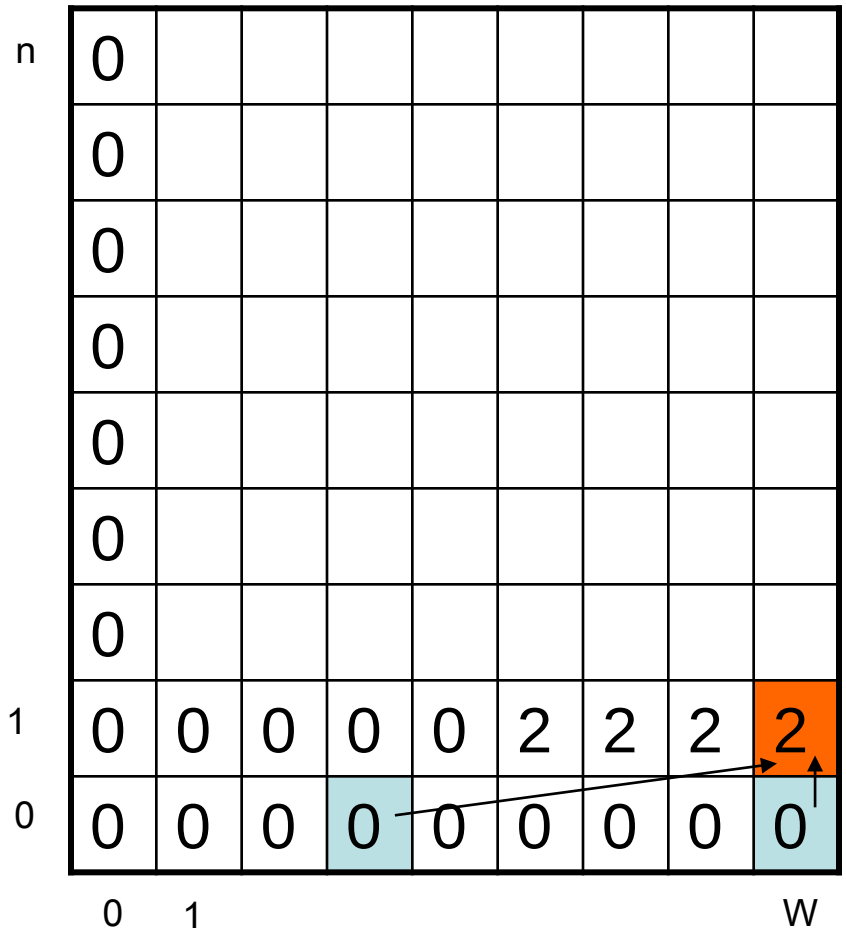
Beispiel:



	Größe g	Wert v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

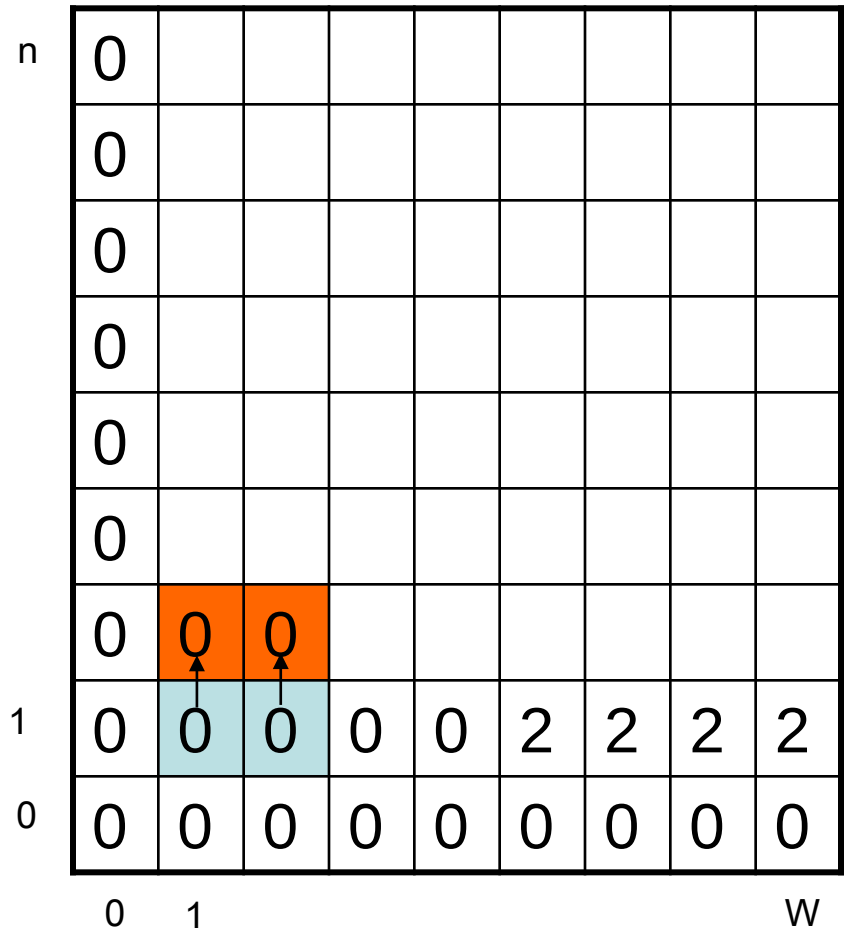
Beispiel:



	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

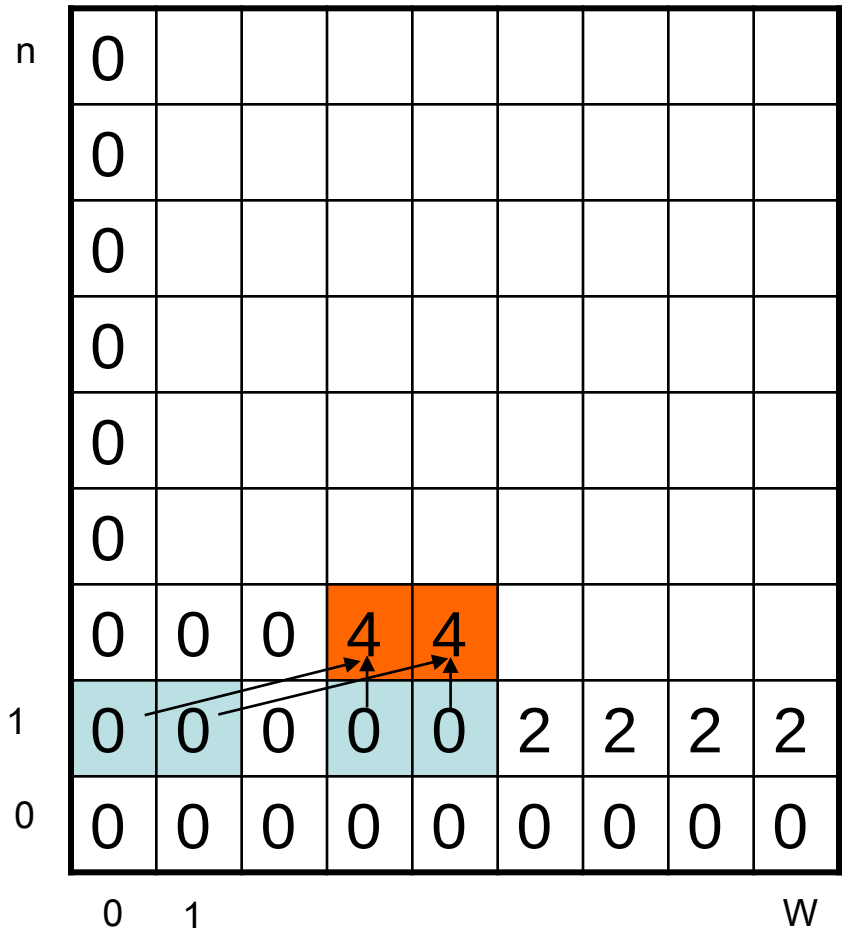


n	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0	0	0						
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	Größe (g)	Wert (v)
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

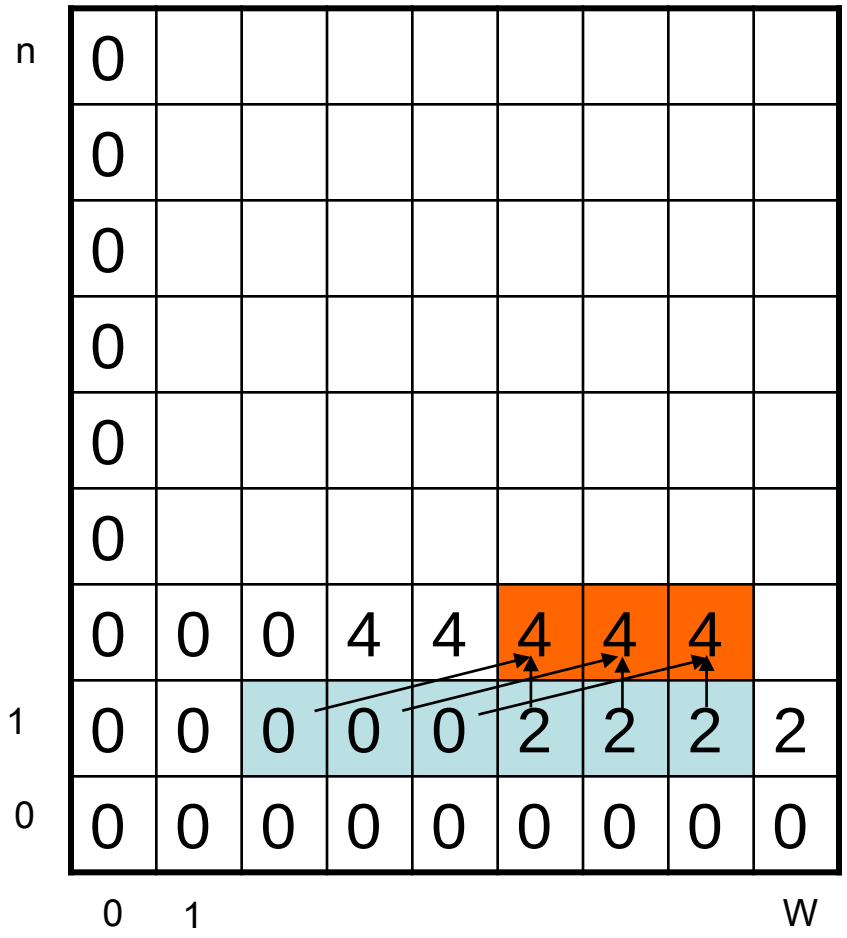
Beispiel:



	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

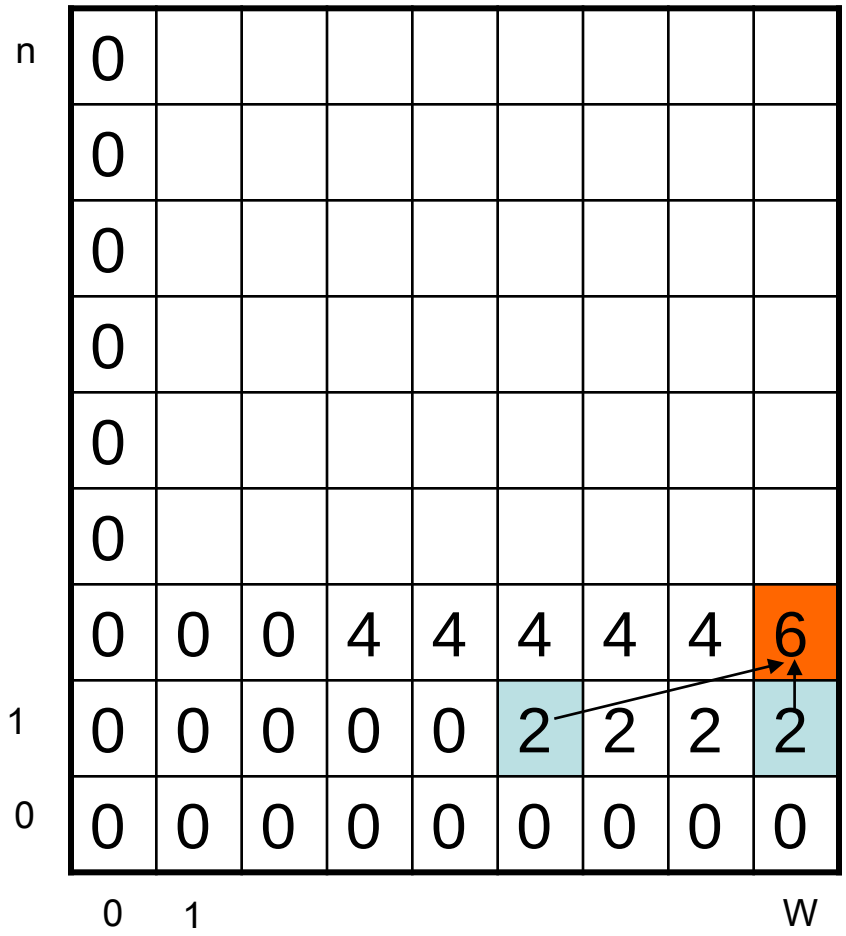
Beispiel:



	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

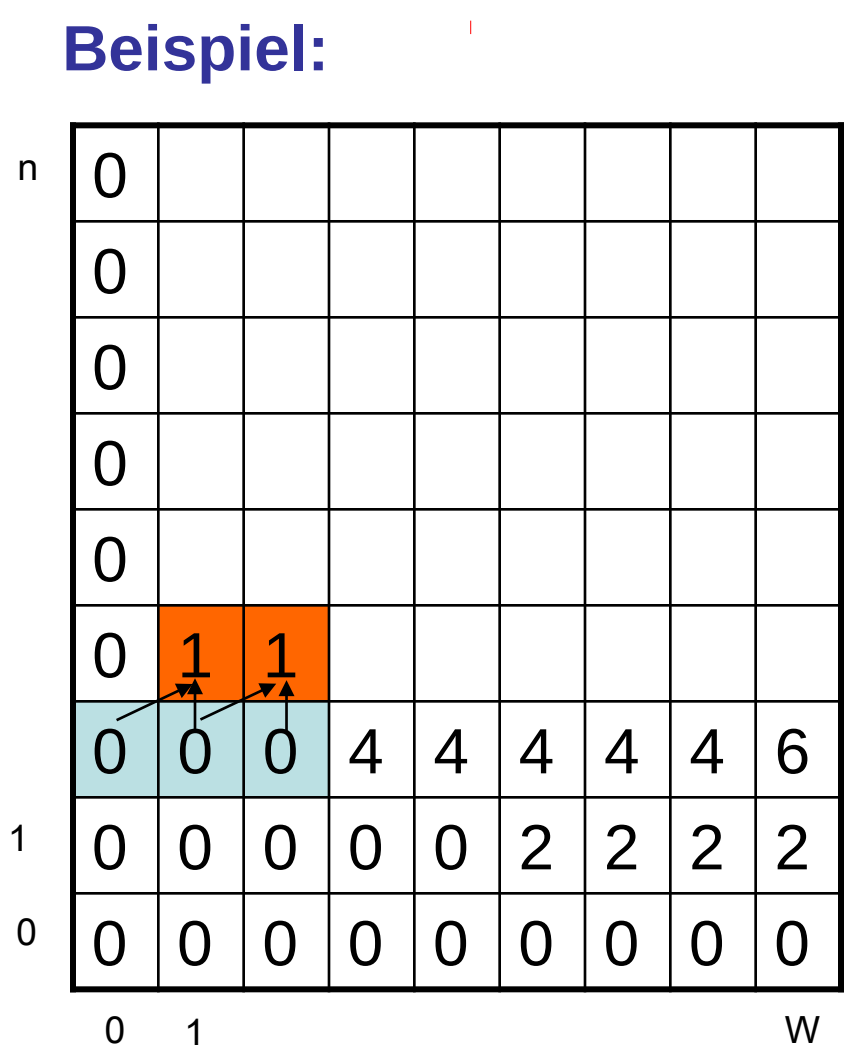


	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0								
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	Größe (g)	Wert (v)
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:



	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

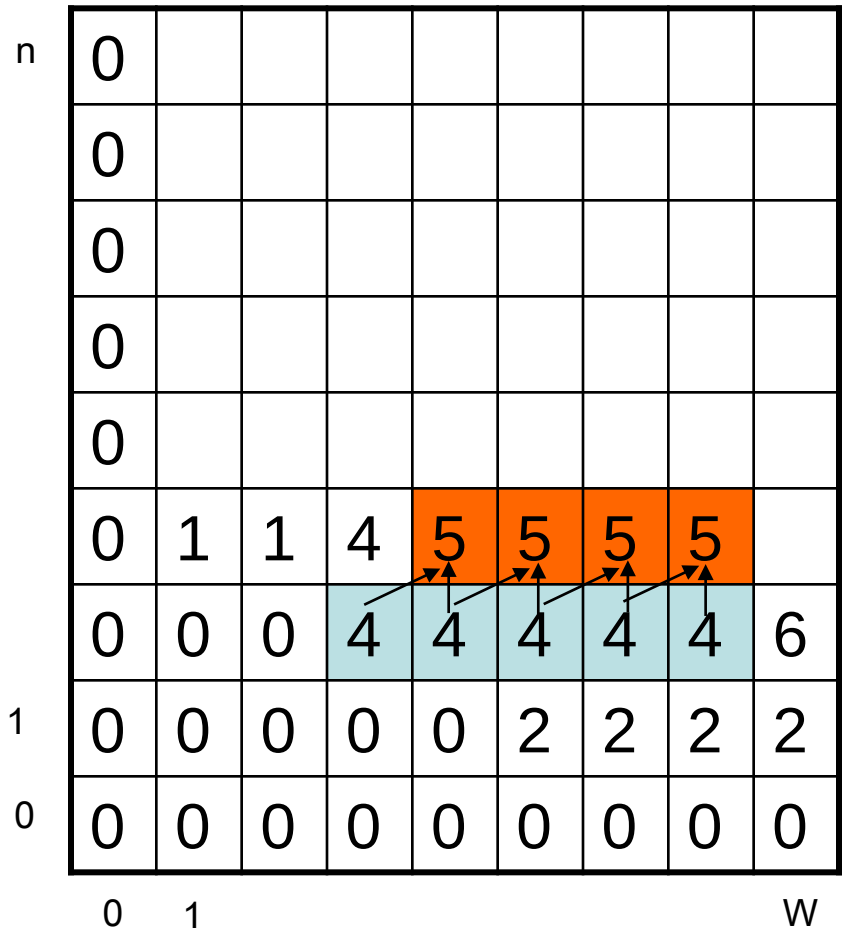
Beispiel:

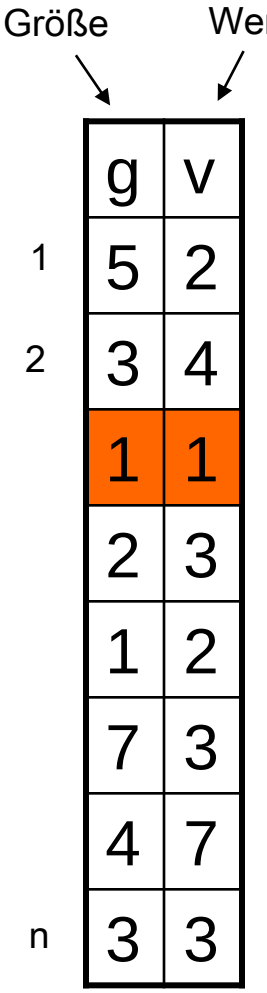
n	0							
	0							
	0							
	0							
	0							
	0	1	1	4				
	0	0	0	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1						W

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:





Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n	0							
	0							
	0							
	0							
	0							
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	1						W

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n									
	0								
	0								
	0								
	0								
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	1						W

	Größe g	Wert v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n	0								
	0								
	0								
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	1						W

Größe Wert

	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n									
	0								
	0								
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n	0								
	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n									
	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

Optimaler Lösungswert für W=8

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Beispiel:

n								
	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	7	9	10	12	13
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	2	3	5	6	7	9	10	10
	0	1	3	4	5	7	8	8	8
	0	1	1	4	5	5	5	5	6
	0	0	0	4	4	4	4	4	6
1	0	0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1							W

Optimaler Lösungswert für W=8

	Größe	Wert
	g	v
1	5	2
2	3	4
	1	1
	2	3
	1	2
	7	3
	4	7
n	3	3

Dynamisches Programmieren – Rucksack

Satz 20.6

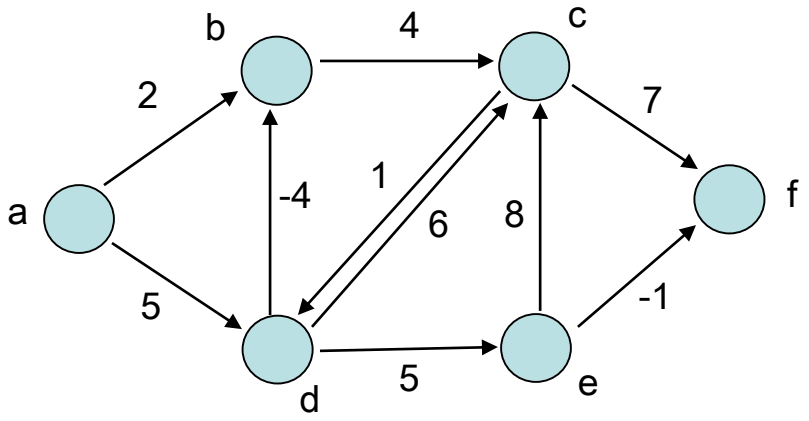
Algorithmus Rucksack berechnet in $\Theta(nW)$ Zeit den Wert einer optimalen Lösung, wobei n die Anzahl der Objekte ist und W die Größe des Rucksacks.

Dynamische Programmierung - APSP

All Pairs Shortest Path (APSP):

- Eingabe: Gewichteter Graph G=(V,E)
- Ausgabe: Für jedes Paar von Knoten u,v$\in$V die Distanz von u nach v sowie einen kürzesten Weg

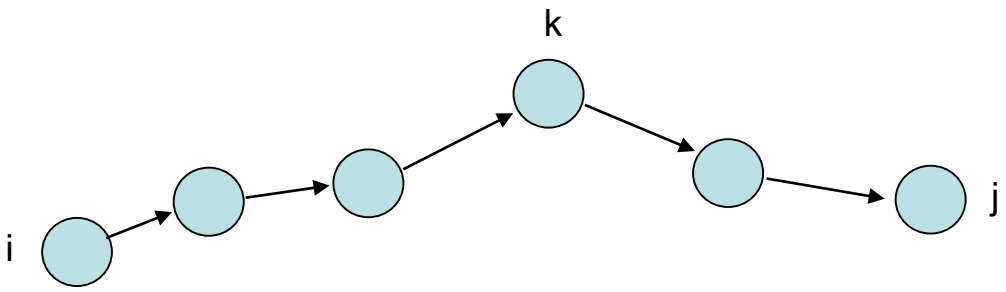
	a	b	c	d	e	f
a	0	1	5	5	10	9
b	∞	0	4	5	10	9
c	∞	-3	0	1	6	5
d	∞	-4	0	0	5	4
e	∞	5	8	9	0	-1
f	∞	∞	∞	∞	∞	0



Dynamische Programmierung - APSP

Zur Erinnerung:

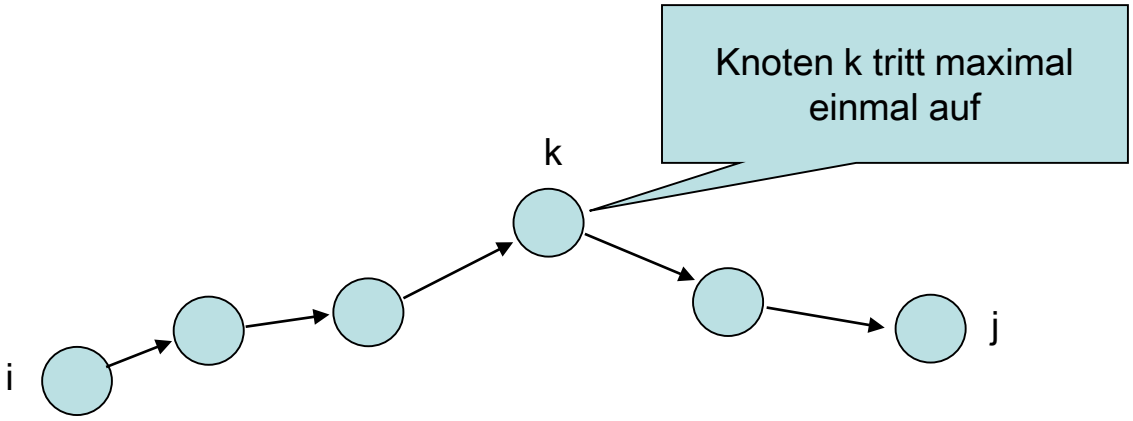
- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der nur über Knoten aus {1,…,k} läuft:



Dynamische Programmierung - APSP

Zur Erinnerung:

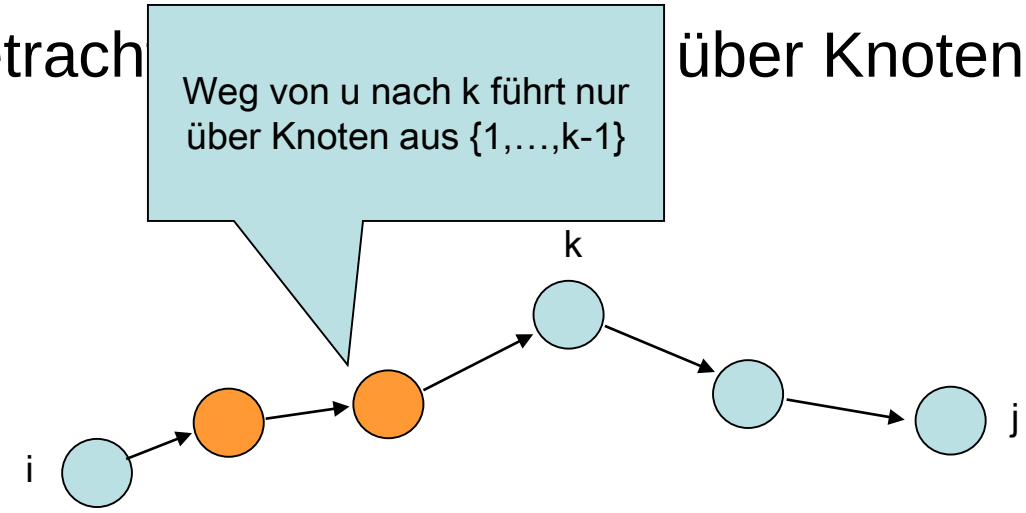
- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der nur über Knoten aus {1,…,k} läuft:



Dynamische Programmierung - APSP

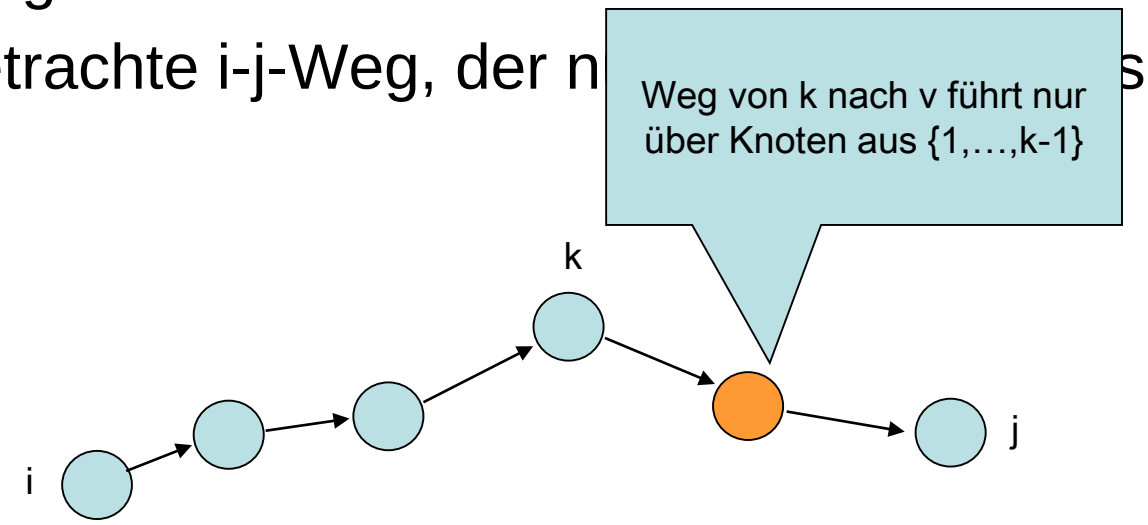
Zur Erinnerung:

- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrach über Knoten aus {1,…,k} läuft:



Zur Erinnerung:

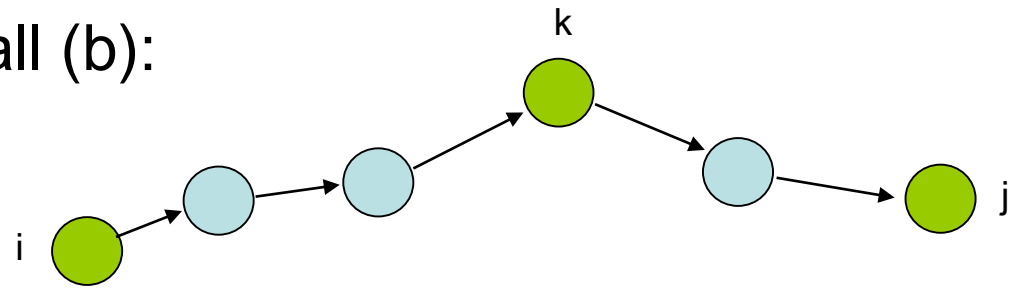
- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der n s {1,…,k} läuft:



Dynamische Programmierung - APSP

- Kürzester i-j-Weg über Knoten aus {1,…,k} ist
- (a) kürzester i-j-Weg über Knoten aus {1,…,k-1} oder
- (b) kürzester i-k-Weg über Knoten aus {1,…,k-1} gefolgt von kürzestem k-j-Weg über Knoten aus {1,…,k-1}

Fall (b):



Die Rekursion:

- Sei $d_{ij}^{(k)}$ die Länge eines kürzesten i-j-Wegs mit Knoten aus {1,…,k}

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{, falls } k=0 \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right) & \text{, falls } k \geq 1 \end{cases}$$

- Matrix $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ enthält die gesuchte Lösung

Dynamische Programmierung - APSP

Floyd-Warshall(W,n)

1. $D^{(0)} \leftarrow W$
2. **for** $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
4. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
5. $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
6. **return** $D^{(n)}$

Dynamische Programmierung

Generelle Vorgehensweise:

1. Aufstellung der Rekursionsgleichung
   - Initialfall (z.B. OPT(i,0)=OPT(0,j)=0)
   - Rekursion (z.B. OPT(i,j)=…)
   - Optimaler Wert (z.B. OPT = OPT(n,W))

2. Formulierung des dynamischen Programms
   Wichtig: Berechnung so durchführen, dass in der Rekursion auf bereits berechnete Werte zurückgegriffen werden kann!

Beispiel 1: Matrixketten-Multiplikation

Gegeben: Matrizen $A_1,\ldots,A_n$, und Werte $p_0,\ldots,p_n \in \mathbb{N}$, wobei Matrix A_i eine $p_{i-1} \times p_i$-Matrix ist.

Gesucht: Minimale Anzahl an Multiplikationen, um $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ zu berechnen.

Beobachtung:

- Sei $A_{i..j} = A_i \cdot \ldots \cdot A_j$
- Dann kostet das Matrixprodukt $A_{i..k} \cdot A_{k+1..j}$ $p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_j$ viele Multiplikationen (mit der naiven Methode)

Dynamische Programmierung

- m[i,j]: minimale Anzahl an Multiplikationen, um $A_{i..j}$ zu berechnen

Initialfall:

$m[i,i]=0$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Rekursion:

$m[i,j] = \min_{i \le k < j} m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_j$ für alle $i<j$

Optimaler Wert:

$m[1,n]$

Berechnung:

- Führe erst Initialfall aus
- Berechne $m[i,j]$ für alle $i<j$ mit $|j-i|=d$, angefangen mit $d=1$

Beispiel 2: Optimaler binärer Suchbaum

Gegeben: Schlüssel $k_1,\ldots,k_n$, mit Zugriffswahrscheinlichkeiten $p_1,\ldots,p_n \in [0,1]$, so dass $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Gesucht: Binärer Suchbaum T mit minimaler erwarteter Suchzeit, d.h. $\sum_{i=1} p_i \cdot (\text{Tiefe}_T(k_i)+1)$ ist minimal.
($\text{Tiefe}_T(k)$: Tiefe des Knotens mit Schlüssel k in T
(Tiefe der Wurzel ist 0))

Dynamische Programmierung

- m[i,j]: minimale erwartete Suchzeit für einen Binärbaum mit den Schlüsseln k_i bis k_j

Initialfall:

- $m[i,i-1]=0$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$
- $m[i,i]=p_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$

Rekursion:

$m[i,j] = \min_{i \le k \le j} m[i,k-1] + m[k+1,j] + \sum_{l=i}^{j} p_l$ für alle $i<j$

Optimaler Wert:

$m[1,n]$

Berechnung:

- Führe erst Initialfall aus
- Berechne $m[i,j]$ für alle $i<j$ mit $|j-i|=d$, angefangen mit $d=1$
- Gib am Ende $m[1,n]$ aus

Beispiel 3: Längster einfacher Weg in einem gerichteten azyklischen Graph

Gegeben: Gerichteter azyklischer Graph $G=(V,E)$ mit $V=\{1,\ldots,n\}$, wobei die Knoten gemäß ihrer Nummern topologisch sortiert sind, d.h. für alle $(v,w)\in E$ gilt $v<w$.

Gesucht: Länge des längsten einfachen (d.h. kreisfreien) Weges in G.

Dynamische Programmierung

- L[i,j]: Länge des längsten einfachen Weges von Knoten i nach Knoten j in G
- A[i,j]$\in${0,1}: ist 1 genau dann wenn (i,j)$\in$E

Initialfall:

- L[i,i]=0 für alle i$\in${1,…,n}

Falls die Menge leer ist, ist max{…}=0.

Rekursion:

$$L[i,j] = \max \{ \max\{L[i,k] + L[k,j] \mid i<k<j \text{ und } L[i,k]>0 \text{ und } L[k,j]>0\}, A[i,j] \} \text{ für alle } i<j$$

Optimaler Wert:

$\max_{i<j} L[i,j]$ (=0: es gibt keine Kanten in G)

Berechnung:

- Führe erst Initialfall aus
- Berechne L[i,j] für alle i<j mit |j-i|=d, angefangen mit d=1
- Gib am Ende $\max_{i<j} L[i,j]$ aus

Beispiel 4: Fahrstuhloptimierung

Gegeben: Flure $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{N}$, bei denen die n Kunden aussteigen wollen ($f_1 \leq \ldots \leq f_n$), und maximale Anzahl Haltepunkte $k \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Minimale Anzahl an Fluren, die die Kunden bei maximal k Haltepunkten zu Fuß gehen müssen, um ihren Zielflur zu erreichen, wenn der Fahrstuhl bei Flur 1 startet.

Dynamische Programmierung

- $m[i,j]$: minimale Anzahl an Fluren, die die Kunden zu Fuß gehen müssen, wenn der Fahrstuhl genau j-mal hält und der höchste Halt Flur i ist.
- $flure[i,j]$: Minimale Anzahl an Fluren, die Kunden mit Aussteige-wunsch f mit $i \leq f < j$ laufen müssen, wenn der Fahrstuhl nur bei Flur i und j aber nicht dazwischen hält. (Kann direkt berechnet werden.)

Initialfall:

$m[i,1] = flure[1,i]+flure[i,\infty]$ für alle $i \in \{2,\ldots,f_n\}$

Rekursion:

$m[i,j+1] = \min_{j+1 \leq l < i} m[l,j]-flure[l,\infty]+flure[l,i]+flure[i,\infty]$ für alle $i>j+1$, $j \geq 1$

Optimaler Wert:

$\min_{k+1 \leq i \leq f_n} m[i,k]$

Dynamische Programmierung

Teile & Herrsche:

- Aufteilen der Eingabe in mehrere Unterprobleme
- Rekursives lösen der Unterprobleme
- Zusammenfügen

Gierige Algorithmen:

- Konstruiere Lösung Schritt für Schritt
- In jedem Schritt optimiere einfaches, lokales Kriterium

Dynamische Programmierung:

- Formuliere Problem rekursiv
- Vermeide mehrfache Berechnung von Teilergebnissen
- Verwende „bottom-up“ Implementierung

Probleme

- 10131: Is Bigger Smarter?
- 103: Stacking Boxes
- 104: Arbitrage
- 108: Maximum Sum
- 116: Unidirectional TSP
- 222: Budget Travel
- 10069: Distinct Subsequences

Hausaufgabe:

10003: Cutting Sticks