Proseminar
Effiziente Algorithmen

Kapitel 3: Strings

Prof. Dr. Christian Scheideler

WS 2017

Übersicht

- Grundlegende Notation
- Ein naiver Algorithmus
- Knuth-Morris-Pratt Algorithmus
- Aho-Corasick Algorithmus

Grundlegende Notation

- Alphabet Σ: endliche Menge an Symbolen
  $|\Sigma|$: Kardinalität von Σ
- Wort (String, Zeichenkette) s: endliche Folge von Symbolen über Σ
- $|s|$: Länge von s
- ε: leeres Wort, d.h., $|\varepsilon|=0$
- Σ^n: Menge aller Worte über Σ der Länge n
  $\Sigma^0=\{\varepsilon\}$
- $\Sigma^*=U_{i\geq 0}\,\Sigma^i$: Menge aller Worte über Σ
- $\Sigma^+=U_{i\geq 1}\,\Sigma^i$: Menge aller Worte über Σ außer ε

Grundlegende Notation

Definition 1: Seien $s=s_1 \ldots s_n$ und $s'=s'_1 \ldots s'_m$ Worte über Σ.

- s' heißt Teilwort von s falls es ein $i \geq 1$ gibt mit $s'=s_i s_{i+1} \ldots s_{i+m-1}$
- s' heißt Präfix von s falls $s'=s_1 s_2 \ldots s_m$
- s' heißt Suffix von s falls $s'=s_{n-m+1} s_{n-m+2} \ldots s_n$

Es gibt zwei Varianten des String Matching Problems.

Gegeben zwei Worte s (das Suchwort) und t (der Text),

1. Bestimme, ob s ein Teilwort von t ist oder
2. Bestimme alle Positionen, ab denen s ein Teilwort von t ist.

Grundlegende Notation

Beispiel: finde avoctdfytvv in

kvjlixapejrbxeenpphkhthbkwyrwamnugzhppfxiyjyanhapfwbghx
mshrlyujfjhrsovkvveylnbxnawavgizyvmfohigeabgksfnbkmffxjdf
ffqbualeytqrphyrbjqdjqavctgxjifqgfgydhoiwhrvwqbxgrixydzdfss
bpajnhopvlamhhfavoctdfytvvggikngkwzixgjtlxkozjlefilbrboiegwf
gnbzsudssvqymnapbpqvlubdoyxkkwhcoudvtkmikansgsutdjyth
apawlvliygjkmxorzeoafeoffbfxuhkzukeftnrfmocylculksedgrdsfe
lvayjpgkrtedehwhrvvbbltdkctq

Im Allgemeinen ist |t|>>|s| (Google web search)

Naiver Algorithmus

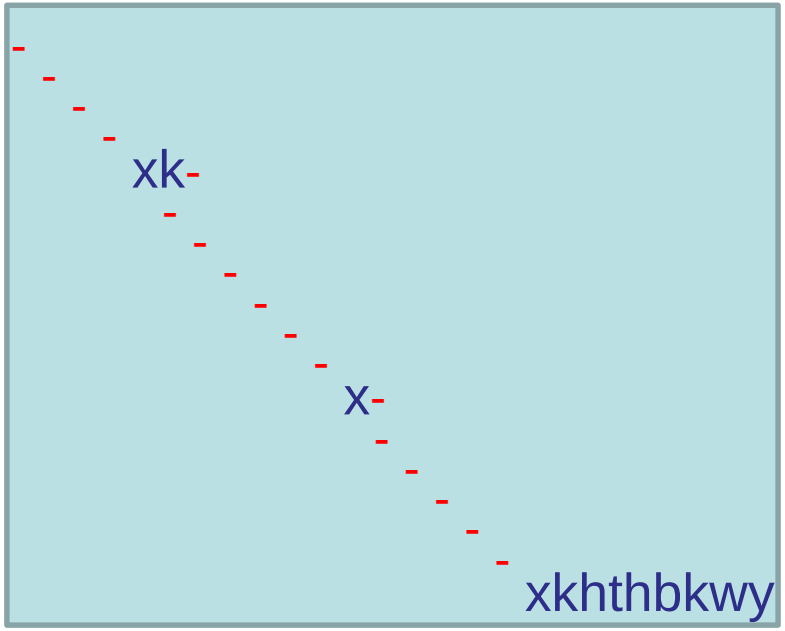
Input: Text t, Suchwort s ($|t|=n$, $|s|=m$)

Algorithm SimpleSearch:

```
for i:=1 to n-m+1 do
    j:=1
    while j≤m and s[j]=t[i+j-1] do
        j:=j+1
    if j>m then output i
```

Naiver Algorithmus

Suchstring s: xkhthbkwy
Text t: kvavixkpejrbxeenppxkhthbkwy

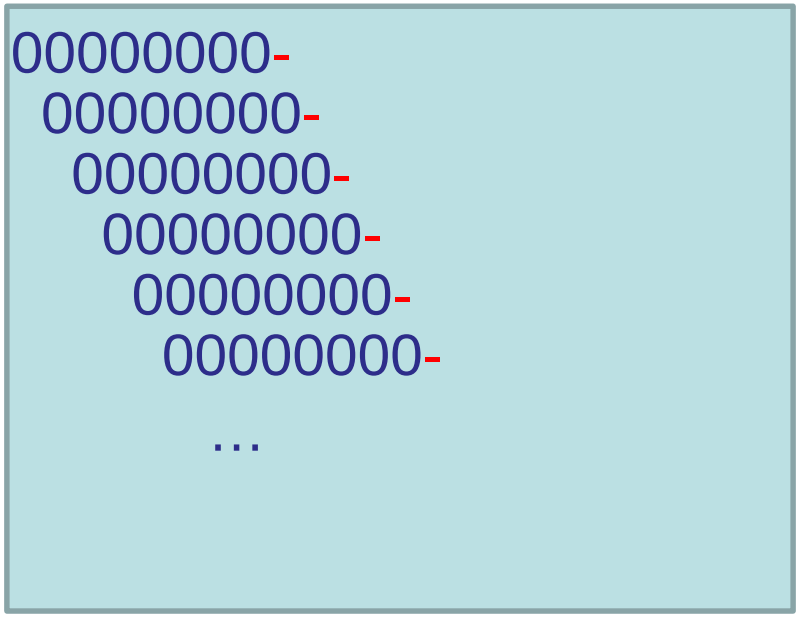


Ist SimpleSearch immer gut?

Anzahl verglichener Symbole: n+3

Naiver Algorithmus

Suchstring s: 000000001
Text t: 000000000000000000000001



Im worst case hat SimpleSearch eine hohe Laufzeit!

Anzahl verglichener Symbole: n·m

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Beobachtung: bei einem Mismatch beim i-th Symbol des Suchworts kennen wir die vorigen i-1 Symbole im Text.

Idee: berechne im vornherein, wie wir dieses Wissen bestmöglich bei einem Mismatch ausnutzen können

Beispiel:

- Suchwort s: ababcab
- Text: ababa….

  ababcab

  ababcab (schiebe s um zwei für nächstmögl. Übereinstimmung, führe Abgleich bei aktueller Pos. a im Text fort)

Knuth-Morris-Pratt Algorithm

Im Allgemeinen:

- Angenommen, $(s_1 \ldots s_i)=(t_1 \ldots t_i)$ aber $s_{i+1} \neq t_{i+1}$.
- Dann gehe zur ersten Position d in t, so dass $(s_1 \ldots s_{i-d+1}) = (t_d \ldots t_i)$ und fahre mit dem Abgleich bei Position t_{i+1} fort.
- In diesem Fall gilt $(s_1 \ldots s_{i-d+1}) = (s_d \ldots s_i)$.
- Wir möchten alle möglichen Sprünge in einem Preprocessing berechnen.

Ziel des Preprocessings:

- Finde für jede Position i in s das minimale $d>1$, so dass $(s_1 \ldots s_{i-d+1}) = (s_d \ldots s_i)$. Gibt es kein d, setzen wir $d=i+1$.
- Wir benennen das entsprechende d für i mit d_i.
- Die d_i´s werden in einem Feld gespeichert, so dass sie schnell zugreifbar sind.

Knuth-Morris-Pratt Algorithm

Die d_i-Werte können effizient berechnet wie folgt werden:

Algorithm KMP-Preprocessing:

```
d_0:=2; d_1:=2   // Verschiebung von s um 1
j:=d_1           // aktuelle Verschiebung von s
for i:=2 to m do
    while j≤i and s_i≠s_{i-j+1} do
        // (s_1…s_{i-j})=(s_j…s_{i-1}) aber s_{i-j+1}≠s_i
        j:=j+d_{i-j} -1
    d_i:=j
```

Knuth-Morris-Pratt Algorithm

Beispiel: s=ababaca

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{d_i}$	2	2	3	3	3	3	7	7

Satz: Die Laufzeit des KMP-Preprocessing ist O(m).

Knuth-Morris-Pratt Algorithm

Algorithm KMP:

KMP-Preprocessing
i:=1 // aktuelle Position in t
j:=1 // aktuelle Startposition von s in t
while $i \leq n$ do
    if $j \leq i$ and $t_i \neq s_{i-j+1}$ then
        $j:=j+d_{i-j}-1$
    else
        if $i-j+1=m$ then // s ab Pos. j gefunden
            output j
            $j:=j+d_m-1$
        $i:=i+1$

Boyer-Moore Algorithmus

- Im Gegensatz zum KMP Algo vergleicht der Boyer-Moore Algorithmus die Zeichen des Suchworts von rechts nach links.
- Dadurch hat der Boyer-Moore Algorithmus in der Praxis eine Laufzeit von O(n/m) statt O(n+m). Er ist allerdings etwas aufwändiger zu implementieren (siehe den TUM-Spickzettel).

Aho-Corasick Algorithmus

Problem: suche in Text t nach allen Positionen, in denen ein Suchwort in $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$ startet.

Im folgenden sei $m_i=|s_i|$ und $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$.

Erste Idee: lass KMP Algorithmus parallel für alle Suchworte laufen.

Laufzeit: $O(m+k\cdot n)$

Preprocessing Hauptalgorithmus

Aho-Corasick Algorithmus

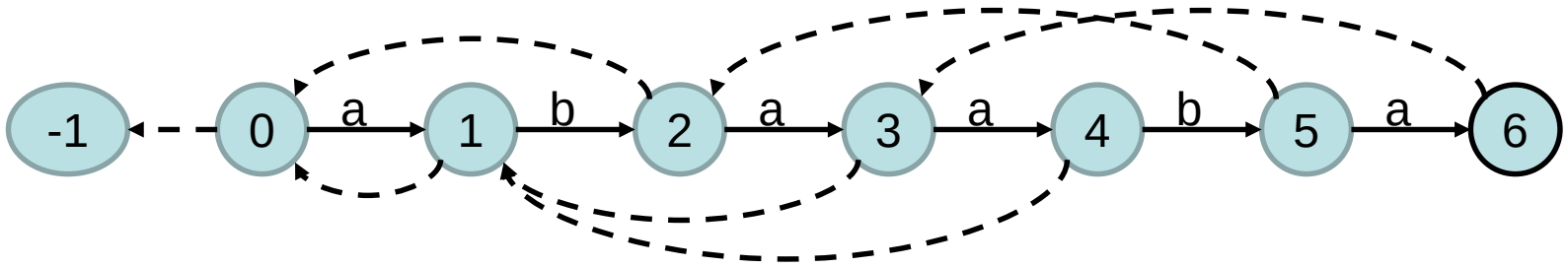
Bessere Idee: verwende anstelle von Tabellen mit d_i-Werten einen endlichen Automaten.

Beispiel: sei s=abaaba

- Tabelle der d_i-Werte:

i	0	1	2	3	4	5	6
d_i	2	2	3	3	4	4	4

- Endlicher Automat:



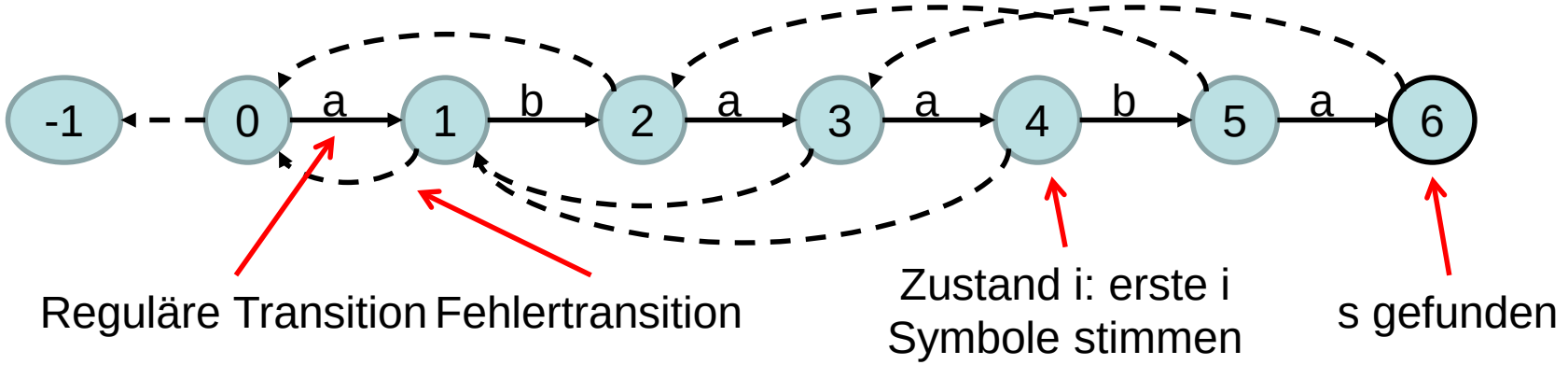
Aho-Corasick Algorithmus

Beispiel: sei s=abaaba

- Tabelle der d_i-Werte:

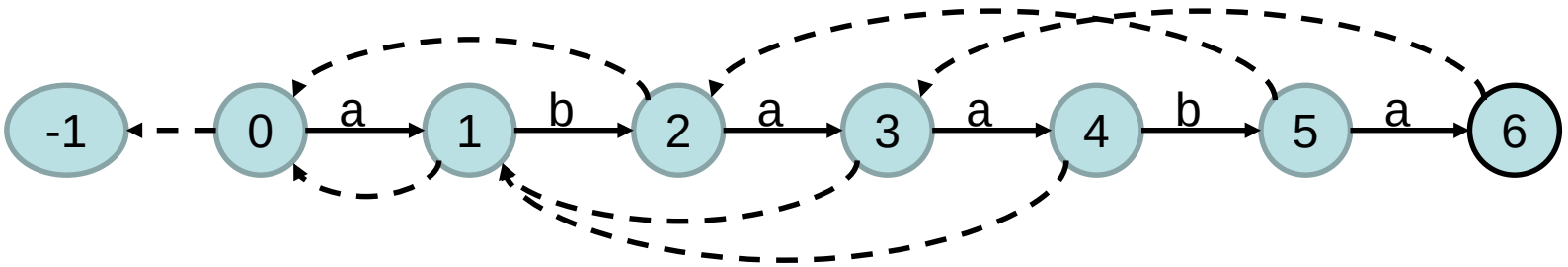
i	0	1	2	3	4	5	6
d_i	2	2	3	3	4	4	4

- Endlicher Automat:



Aho-Corasick Algorithmus

Beispiel: sei s=abaaba



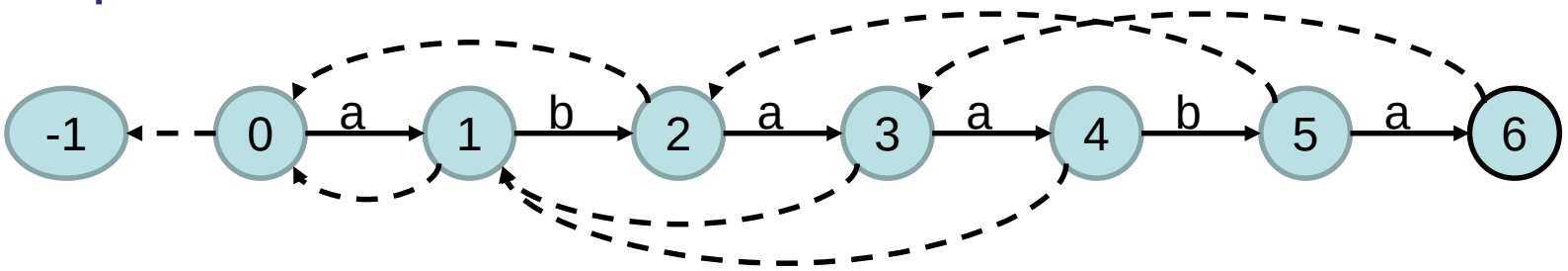
Dieser wird AC-Automat genannt.

Definition: Ein AC-Automat besteht aus:

- Q: endliche Zustandsmenge
- $\Gamma=\Sigma\cup\{fail\}$: endliches Alphabet (mit Eingabealphabet Σ)
- $\delta:Q\times\Gamma\rightarrow Q$: Übergangsfunktion
- q_0: Anfangszustand
- $F\subseteq Q$: Menge akzeptierender Zustände

Aho-Corasick Algorithmus

Beispiel: sei s=abaaba



AC-Automat für $s \in \Sigma^*$ mit $|s|=m$:

- $Q=\{-1,0,1\ldots,m\}$, $q_0=0$ und $F=\{m\}$
- $\Gamma=\Sigma \cup \{fail\}$
- Für alle $i \in \{0,\ldots,m-1\}$, $\delta(i,s_{i+1})=i+1$
- Für alle $i \in \{0,\ldots,m\}$, $\delta(i,fail)=i-d_i+1$
  Die Fehlertransition wird benutzt, falls für gelesenes Symbol keine reguläre Transition existiert.

Aho-Corasick Algorithmus

AC Preprocessing für ein einzelnes Suchwort s:

Algorithm AC-Preprocessing:

```
d_0:=2; d_1:=2  // Verschiebung von s um 1
j:=d_1          // aktuelle Verschiebung von s
for i:=2 to m do
    while j≤i and s_i≠s_{i-j+1} do
        // (s_1…s_{i-j})=(s_j…s_{i-1}) aber s_{i-j+1}≠s_i
        j:=j+d_{i-j} -1
    d_i:=j
// berechne Fehlertransitionen f_0,…,f_m
for i:=0 to m do f_i:=i-d_i+1
```

Satz: Das AC Preprocessing hat Laufzeit O(m).

Aho-Corasick Algorithmus

Aho-Corasick Algorithmus für ein Suchwort:

AC-Preprocessing
j:=0 // Startposition im Automaten
for i:=1 to n do
  while (j≠-1 and $t_i \neq s_{j+1}$) do
    j:=f_j
  j:=j+1
  if j=m then output i-m+1

Satz: Der AC algorithm hat eine Laufzeit von O(n).

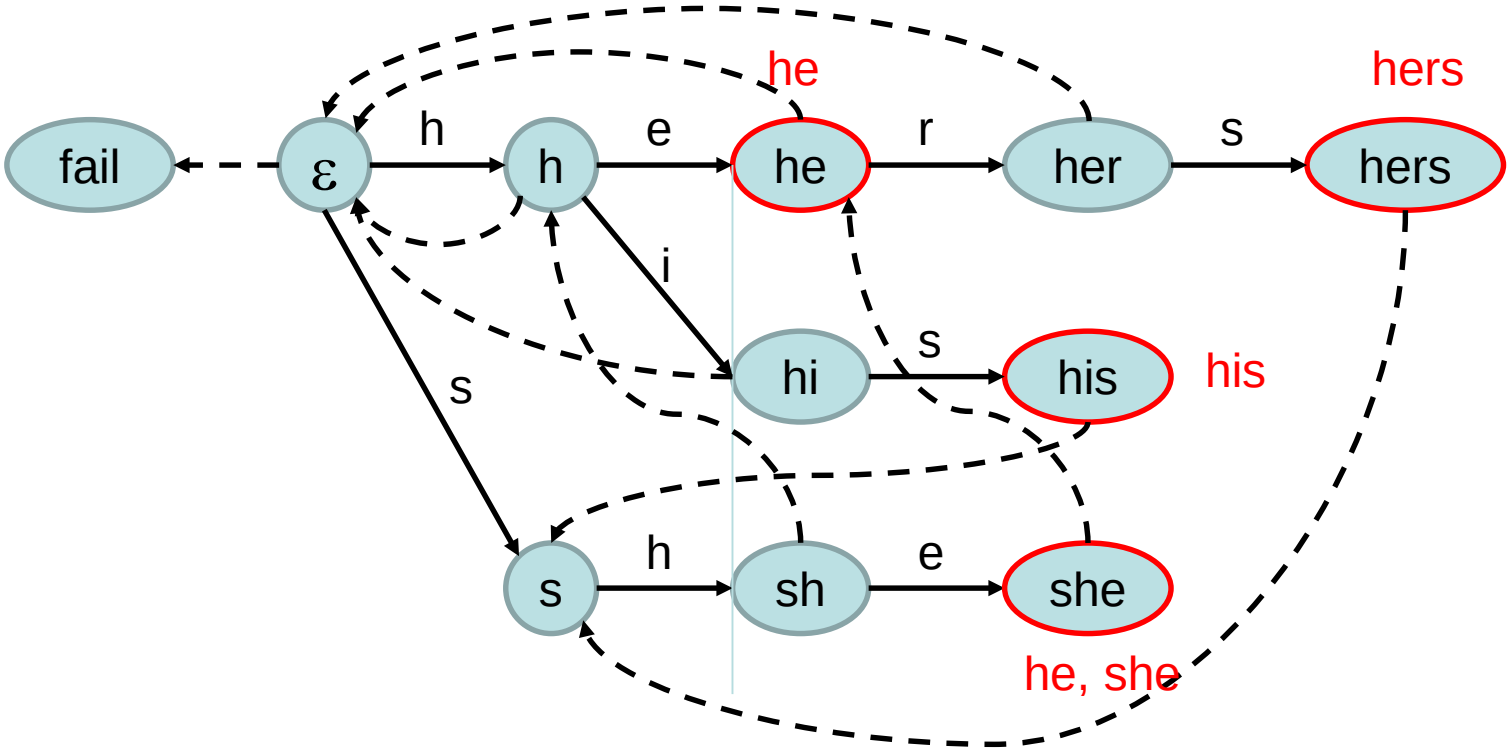
Aho-Corasick Algorithmus

AC Automat für Menge S von Suchworten:

- $Q=\{ w \in \Sigma^* \mid w$ ist Präfix eines $s \in S\} \cup \{fail\}$ und $q_0=\varepsilon$
- $F=F_1 \cup F_2$ wobei
  - $F_1=S$ und
  - $F_2=\{w \in \Sigma^* \mid \exists s \in S: s$ ist Suffix von $w\}$
- Für alle $w \in Q$ und $a \in \Sigma$ gilt:
  - $\delta(w,a) = w \circ a$ falls $w \circ a \in Q$, sonst
  - $\delta(w,fail)=w'$ für das $w' \in Q$, das das größte Suffix von w ist. Für $w=\varepsilon$ ist $\delta(w,fail)=fail$ (wobei „fail“ den Zustand repräsentiert, der vorher „-1“ war).

Aho-Corasick Algorithmus

Beispiel: S={he,she,his,hers}



Aho-Corasick Algorithmus

Aho-Corasick Algorithmus für eine Menge S an Suchworten:

- m: Summe der Längen aller $s \in S$
- f_w: Zustand, der für $\delta(w,fail)$ erreicht wird
- S_w: Menge aller $s \in S$, die ein Suffix von w sind

```
AC-Preprocessing2
w:=ε   // Startposition im AC Automat
for i:=1 to n do
    while (w≠fail and δ(w,t_i) is not defined) do
        w:=f_w
    if w=fail then w:=ε else w:=w∘t_i
    if w∈F then output (i,S_w)
```

Satz: Der AC Algorithmus hat Laufzeit O(n+m).

Aho-Corasick Algorithmus

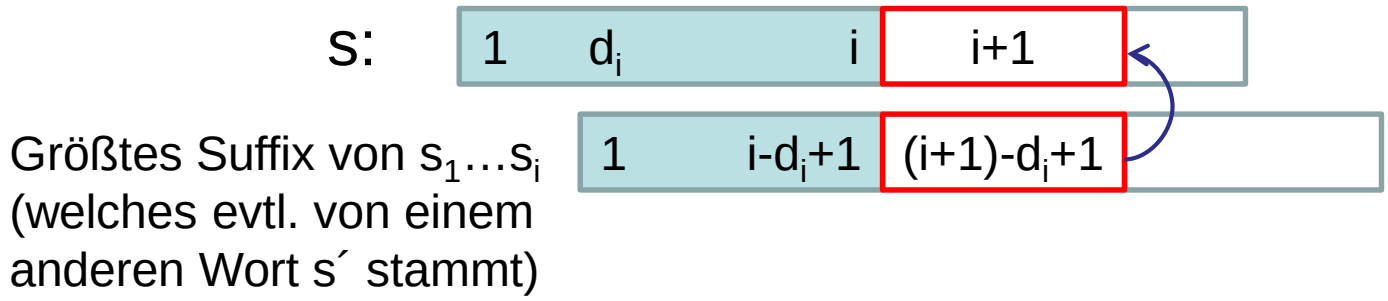
Der AC Automat für S kann in zwei Phasen konstruiert werden:

Phase I: kontruiere den Präfixbaum von S mit den regulären Transitionen (Zeit O(m))

Phase II: berechne die Fehlertransitionen ab Zustand ε in der Reihenfolge wie bei der Breitensuche

Berechnung für Phase II ist ähnlich zum KMP Preprocessing:

- Betrachte den Zustand $s_1 \ldots s_{i+1}$ des AC Automaten. Starte mit der Fehlertransition für $s_1 \ldots s_i$ als das größtmögliche Suffix für die Fehlertransition von $s_1 \ldots s_{i+1}$.



Aho-Corasick Algorithmus

Phase II:

- Initialization:
  - $f_\varepsilon := fail$
  - $f_a := \varepsilon$ for all $a \in \Sigma$
- For all prefixes $w \in \Sigma^*$ in BFS order:
  - $f_w := f_{pred(w)}$ // pred(w): w ohne letztes Symbol
  - while ($f_w \neq fail$ and $\delta(f_w, last(w))$ undefined) do
    // last(w): letztes Symbol von w
    $f_w := f_{f_w}$
  - if $f_w = fail$ then $f_a := \varepsilon$ else $f_w := \delta(f_w, last(w))$

Satz: AC Preprocessing2 hat Laufzeit $O(m)$.

Aho-Corasick Algorithmus

Aho-Corasick Algorithmus für reguläre Ausdrücke (grundlegende Idee):

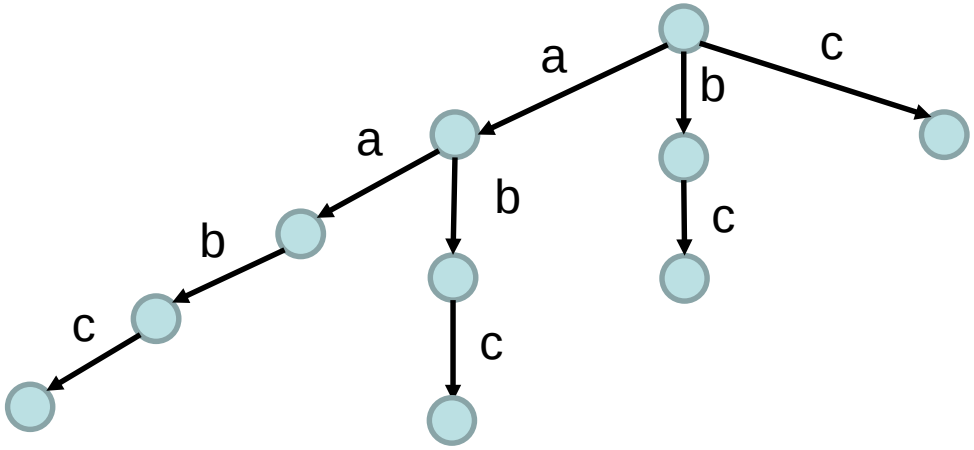
- Bilde endlichen Automat für regulären Ausdruck (siehe EBKFS)
- Füge Fehlertransitionen hinzu, so dass der Automat zurück zum Zustand gelangt, der dem längsten Suffix des Wortes repräsentiert durch den vorherigen Zustand entspricht.

Suffix Bäume

Ziel: bereite Text t so auf, dass für jedes Suchwort s schnell herausgefunden werden kann, ob s in t ist.

Suffix Baum: Baum, der alle Suffixe eines Textes t enthält

Beispiel: Sei t=aabc



Damit ist die Suche nach einem Wort s in Zeit $O(m \log |\Sigma|)$ Zeit möglich, wobei $|s|=m$ und Σ das Eingabealphabet ist.

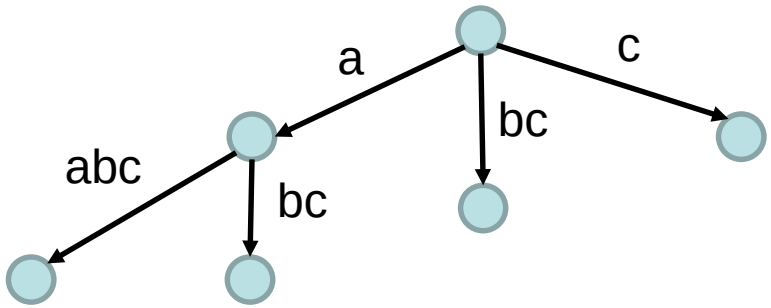
Suffix Bäume

Ziel: bereite Text t so auf, dass für jedes Suchwort s schnell herausgefunden werden kann, ob s in t ist.

Suffix Baum: Baum, der alle Suffixe eines Textes t enthält

Beispiel: Sei t=aabc

komprimiert:
(Patricia trie)



Damit ist die Suche nach einem Wort s in Zeit $O(m \log |\Sigma|)$ Zeit möglich, wobei $|s|=m$ und Σ das Eingabealphabet ist.

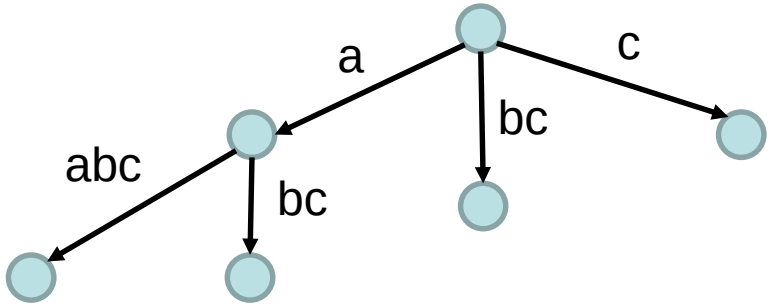
Suffix Bäume

Ziel: bereite Text t so auf, dass für jedes Suchwort s schnell herausgefunden werden kann, ob s in t ist.

Suffix Baum: Baum, der alle Suffixe eines Textes t enthält

Beispiel: Sei t=aabc

komprimiert:
(Patricia trie)



Problem: evtl. hoher Speicherplatz (bis zu $\Theta(n^2)$)

Besser: Suffix Arrays (nur linearer Speicherplatz)

Probleme

- 10252: Common Permutation
- 454: Anagrams
- 10340: All in All
- 760: DNA Sequencing
- 850: Crypt Kicker II
- 10010: Where‘s Waldorf
- 129: Krypton Factor

Hausaufgabe:

- 10132: File Fragmentation