Universelle DTMs

- **bislang special purpose Computer,**
  eine Sprache – eine DTM

- **jetzt allgemeine programmierbare DTMs**
  → universelle DTMs

- **erhalten als Eingabe Beschreibung einer DTM und simulieren diese**

- **benötigen einheitliche Beschreibung von DTMs**
  → Gödelnummern

Standardisierungen

- **betrachten nur 1-Band DTMs**
- **mit Standardalphabeten $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma=\{0,1, \sqcup, \triangleright\}$**
- **andere Alphabete können durch Standardalphabete kodiert werden**
- **DTMs mit anderen Alphabeten können durch DTMs mit Standardalphabeten simuliert werden.**

Gödelnummern - Definition

Definition 2.13 Sei M eine 1-DTM mit

$$Q=\{q_0,\dots,q_n\},\ \ q_{accept} = q_{n-1}, q_{reject} = q_n.$$

Sei $X_1 \triangleq 0$, $X_2 \triangleq 1$, $X_3 \triangleq \sqcup$, $X_4 \triangleq \triangleright$, $D_1 \triangleq L$, $D_2 \triangleq R$.

Wir kodieren $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ durch

$$0^{i+1}10^j10^{k+1}10^l10^m.$$

$Code_t$: Kodierung des t-ten Eintrags für δ, $1 \leq t \leq 4(n-1)$.
(denn #Paare (q_i, X_j) mit $i<n-1$ ist max. $(n-1)|\Gamma|$)

Gödelnummer $\langle M\rangle = 111\ Code_1 11 Code_2 11 Code_3 \dots 11 Code_g 111$

Gödelnummern - Beispiel

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_0,0,R)$	$(q_1,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_3,\triangleright,R)$

Nummer	Eintrag	Kodierung
1	$\delta(q_0,0) = (q_0,0,R)$	0101010100
2	$\delta(q_0,1) = (q_1,1,R)$	0100100100100
3	$\delta(q_0, \sqcup) = (q_3,\sqcup,L)$	0100010000100010
4	$\delta(q_0, \triangleright) = (q_0,\triangleright,R)$	0100001010000100
5	$\delta(q_1,0) = (q_1,0,R)$	001010010100
6	$\delta(q_1,1) = (q_2,1,R)$	00100100100100
7	$\delta(q_1, \sqcup) = (q_3,\sqcup,L)$	00100010000100010
8	$\delta(q_1, \triangleright) = (q_3,\triangleright,R)$	0010000100001000100

Gödelnummern - Beispiel

Nummer	Eintrag	Kodierung
1	$\delta(q_0,0) = (q_0,0,R)$	0101010100
2	$\delta(q_0,1) = (q_1,1,R)$	0100100100100
3	$\delta(q_0, \sqcup) = (q_3,\sqcup,L)$	0100010000100010
4	$\delta(q_0, \triangleright) = (q_0,\triangleright,R)$	01000001010000100
5	$\delta(q_1,0) = (q_1,0,R)$	001010010100
6	$\delta(q_1,1) = (q_2,1,R)$	001001000100100
7	$\delta(q_1, \sqcup) = (q_3,\sqcup,L)$	00100010000100010
8	$\delta(q_1, \triangleright) = (q_3,\triangleright,R)$	0010000010000010000100

$\langle M \rangle =$ 111010101010011010010010010011010001000010001011
010000010100000100110010100101001100100100010010011
00100010000100010110010000010000010000100111

$= 6387798827615802518730094253999341154150 79$

Universelle DTM - Definition

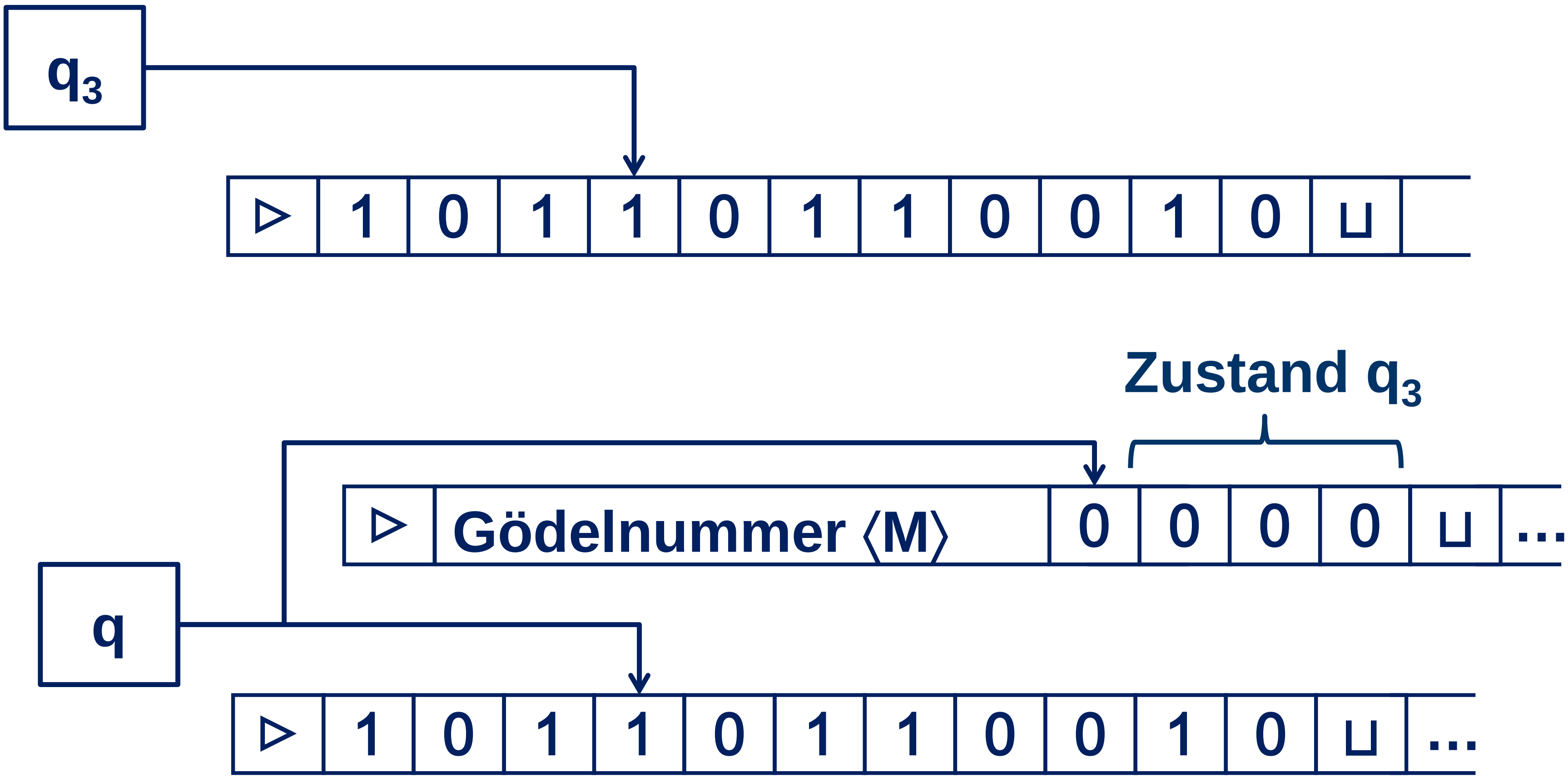
Definition 2.14 Eine DTM M_0 heißt **universell**, falls für jede 1-Band DTM M und jedes x $\in \{0,1\}^*$ gilt

- M_0 gestartet mit $\langle M \rangle x$ hält genau dann, wenn M gestartet mit x hält.
- M_0 akzeptiert/verwirft $\langle M \rangle x$ genau dann, wenn M das Wort x akzeptiert/verwirft.

Satz 2.15 Es gibt eine universelle 2-Band DTM M_0.

Beweis durch Kodierung von Konfigurationen und Simulationen von Schritten.

Konfigurationskodierung auf universeller DTM



Rest des Beweises: Tafel

Die Sprachen Gödel und States

Gödel:= $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ w ist die Gödelnummer einer DTM M.$\}$

Lemma 2.16 Die Sprache Gödel ist entscheidbar.

Beweis: Tafel

States:= $\{(\langle M\rangle,d) \mid$ M besitzt mindestens d Zustände, $d \in \mathbb{N}$.$\}$

($(\langle M\rangle,d)$ kodiert als $\langle M\rangle \circ bin(d)$)

Lemma 2.17 Die Sprache States ist entscheidbar.

Beweis: Tafel

Das Halteproblem

$H := \{\langle M \rangle x \mid \text{M ist DTM, die gestartet mit Eingabe x hält.}\}$

Satz 2.18 Das Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.

DTM, die H akzeptiert

$\overline{M}$ bei Eingabe w $\in \{0,1\}^*$:

1. **Falls w nicht von der Form $\langle M \rangle$x für eine DTM M und x $\in \{0,1\}^*$, lehne ab.**

2. **Simuliere M mit Eingabe x.**

3. **Wird in 2. festgestellt, dass M die Eingabe x akzeptiert, akzeptiere w $= \langle M \rangle$x.**

4. **Wird in 2. festgestellt, dass M die Eingabe x ablehnt, akzeptiere w $= \langle M \rangle$x .**

Die Sprache Useful

Useful:= $\{ (\langle M \rangle, q) \mid$ M ist eine DTM mit Zustand q, und es gibt eine Eingabe w, so dass M gestartet mit w in den Zustand q gerät. $\}$

Lemma 2.19 Die Sprache Useful ist rekursiv aufzählbar.

Aufzählung von Binärfolgen

$w_i = w$, falls bin(i) = 1w für alle $w \in \{0,1\}^*$

i = 638779882761580251873009425399934115415079

= 1110101010100110100100100100110100010000010001011
0100001010000100110010100101001100100100010010011
0010001000010001011001000010000100000100111

w = 110101010100110100100100100110100010000010001011
0100001010000100110010100101001100100100010010011
0010001000010001011001000010000100000100111

DTM, die Useful akzeptiert

E bei Eingabe w $\in \{0,1\}^*$:

1. **Falls w nicht von der Form ($\langle M \rangle$,q) für eine DTM M und einen Zustand q von M ist, lehne ab.**

2. **Wiederhole für i $=$1,2,3,… Schritte bis die DTM M hält:**

   a. **Simuliere für jeweils i Schritte die DTM M mit Eingabe $w_1,\ldots,w_i$.**

   b. **Wird in a. festgestellt, dass M bei einer Eingabe nach höchstens i Schritten den Zustand q erreicht, akzeptiere.**