

Universelle DTMs

- bislang special purpose Computer,
eine Sprache – eine DTM
- jetzt allgemeine programmierbare DTMs
→ **universelle** DTMs
- erhalten als Eingabe Beschreibung einer DTM und
simulieren diese
- benötigen einheitliche Beschreibung von DTMs
→ **Gödelnummern**

Standardisierungen

- betrachten nur 1-Band DTMs
- mit Standardalphabeten $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1, \sqcup, \triangleright\}$
- andere Alphabete können durch Standardalphabete kodiert werden
- DTMs mit anderen Alphabeten können durch DTMs mit Standardalphabeten simuliert werden.

Gödelnummern - Definition

Definition 2.13 Sei M eine 1-DTM mit

$$Q = \{q_0, \dots, q_n\}, \quad q_{\text{accept}} = q_{n-1}, \quad q_{\text{reject}} = q_n.$$

Sei $X_1 \triangleq 0$, $X_2 \triangleq 1$, $X_3 \triangleq \sqcup$, $X_4 \triangleq \triangleright$, $D_1 \triangleq L$, $D_2 \triangleq R$.

Wir kodieren $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ durch

$$0^{i+1}10^j10^{k+1}10^l10^m.$$

Code_t: Kodierung des t -ten Eintrags für δ , $1 \leq t \leq 4(n-1)$.
(denn #Paare (q_i, X_j) mit $i < n-1$ ist max. $(n-1)|\Gamma|$)

Gödelnummer $\langle M \rangle$ = 111 Code₁11Code₂11Code₃...11Code_g111

Gödelnummern - Beispiel

δ	0	1	\sqcup	\triangleright
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_3, \sqcup, L)	(q_0, \triangleright, R)
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_3, \sqcup, L)	(q_3, \triangleright, R)

Nummer	Eintrag	Kodierung
1	$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$	0101010100
2	$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$	0100100100100
3	$\delta(q_0, \sqcup) = (q_3, \sqcup, L)$	0100010000100010
4	$\delta(q_0, \triangleright) = (q_0, \triangleright, R)$	0100001010000100
5	$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, R)$	001010010100
6	$\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, R)$	001001000100100
7	$\delta(q_1, \sqcup) = (q_3, \sqcup, L)$	00100010000100010
8	$\delta(q_1, \triangleright) = (q_3, \triangleright, R)$	00100001000010000100

Gödelnummern - Beispiel

Nummer	Eintrag	Kodierung
1	$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$	0101010100
2	$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$	0100100100100
3	$\delta(q_0, \sqcup) = (q_3, \sqcup, L)$	0100010000100010
4	$\delta(q_0, \triangleright) = (q_0, \triangleright, R)$	0100001010000100
5	$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, R)$	001010010100
6	$\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, R)$	001001000100100
7	$\delta(q_1, \sqcup) = (q_3, \sqcup, L)$	00100010000100010
8	$\delta(q_1, \triangleright) = (q_3, \triangleright, R)$	00100001000010000100

$$\begin{aligned}
 \langle M \rangle &= 111010101010011010010010010011010001000010001011 \\
 &\quad 0100001010000100110010100101001100100100010010011 \\
 &\quad 0010001000010001011001000010000100001000100111 \\
 &= 638779882761580251873009425399934115415079
 \end{aligned}$$

Universelle DTM - Definition

Definition 2.14 Eine DTM M_0 heißt **universell**, falls für jede 1-Band DTM M und jedes $x \in \{0,1\}^*$ gilt

- M_0 gestartet mit $\langle M \rangle x$ hält genau dann, wenn M gestartet mit x hält.
- M_0 akzeptiert/verwirft $\langle M \rangle x$ genau dann, wenn M das Wort x akzeptiert/verwirft.

Satz 2.15 Es gibt eine universelle 2-Band DTM M_0 .

Beweis durch Kodierung von Konfigurationen und Simulationen von Schritten.

Die Sprachen Gödel und States

Gödel := $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist die Gödelnummer einer DTM } M.\}$

Lemma 2.16 Die Sprache Gödel ist entscheidbar.

Beweis: Tafel

States := $\{(\langle M \rangle, d) \mid M \text{ besitzt mindestens } d \text{ Zustände, } d \in \mathbb{N}.\}$
($(\langle M \rangle, d)$ kodiert als $\langle M \rangle \circ \text{bin}(d)$)

Lemma 2.17 Die Sprache States ist entscheidbar.

Beweis: Tafel

Das Halteproblem

$H := \{ \langle M \rangle x \mid M \text{ ist DTM, die gestartet mit Eingabe } x \text{ hält.} \}$

Satz 2.18 Das Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.

DTM, die H akzeptiert

\bar{M} bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Falls w nicht von der Form $\langle M \rangle x$ für eine DTM M und $x \in \{0,1\}^*$, lehne ab.
2. Simuliere M mit Eingabe x .
3. Wird in 2. festgestellt, dass M die Eingabe x akzeptiert, akzeptiere $w = \langle M \rangle x$.
4. Wird in 2. festgestellt, dass M die Eingabe x ablehnt, akzeptiere $w = \langle M \rangle x$.

Die Sprache Useful

Useful := { $\langle M \rangle, q$ | M ist eine DTM mit Zustand q , und es gibt eine Eingabe w , so dass M gestartet mit w in den Zustand q gerät. }

Lemma 2.19 Die Sprache Useful ist rekursiv aufzählbar.

Aufzählung von Binärfolgen

$w_i = w$, falls $\text{bin}(i) = 1w$ für alle $w \in \{0,1\}^*$

$i = 638779882761580251873009425399934115415079$

$= 111010101010011010010010010011010001000010001011$
 $0100001010000100110010100101001100100100010010011$
 $001000100001000101100100001000010000100111$

$w = 11010101010011010010010010011010001000010001011$
 $0100001010000100110010100101001100100100010010011$
 $001000100001000101100100001000010000100111$

DTM, die Useful akzeptiert

E bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Falls w nicht von der Form $(\langle M \rangle, q)$ für eine DTM M und einen Zustand q von M ist, lehne ab.
2. Wiederhole für $i = 1, 2, 3, \dots$ Schritte bis die DTM M hält:
 - a. Simuliere für jeweils i Schritte die DTM M mit Eingabe w_1, \dots, w_i .
 - b. Wird in a. festgestellt, dass M bei einer Eingabe nach höchstens i Schritten den Zustand q erreicht, akzeptiere.