Prof. Dr. Christian Scheideler — Paderborn, den 15.02.2019

1. Klausur zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2018/2019

— Bitte für den Klausuraufkleber freilassen. —

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 50. Sie bestehen die Klausur, wenn Sie mindestens 25 Punkte erzielen.

Benutzen Sie **keinen Bleistift oder Rotstift!** Bitte schreiben Sie oben auf jede Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer (**bitte lesbar!**).

Es ist lediglich ein doppelseitig handbeschriebener DIN-A4-Zettel als Hilfsmittel zugelassen! Räumen Sie alles Weitere außer Ihrem Schreibmaterial und Ihrem Lichtbildausweis vom Tisch. Wer abschreibt **ODER** wer von sich abschreiben läßt, erhält die Endnote **5,0 (mangelhaft)**.

Schreiben Sie Lösungen bitte unter die Aufgabenstellung. Reicht der Platz nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite und die beigefügten Zusatzblätter. Weitere Blätter sind bei Bedarf erhältlich. Lösungen auf Zusatzblättern werden nur dann bewertet, wenn Sie diese bei der entsprechenden Aufgabe vermerken.

Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **genau eine Lösung**.

Viel Erfolg !

1	2	3	4	5	Σ
10	10	10	10	10	50

Klausur: Bonus: Endnote:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 1: (10 Punkte)

Kreuzen Sie pro Teilaufgabe höchstens ein Kästchen an. Für ein falsches Kreuz gibt es einen Minuspunkt, für ein richtiges einen Pluspunkt. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie keine Punkte. Eine negative Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird zu 0 aufgerundet.

(1) Die Sprache $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$ ist rekursiv aufzählbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(2) Die Sprache $L = \{\langle M \rangle \mid M$ hält bei jeder Eingabe$\}$ ist rekursiv aufzählbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(3) Die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist gegenüber dem Komplement abgeschlossen.

☐ Richtig ☐ Falsch

(4) Wenn L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \circ L_2 = \{x \mid \exists w_1 \in L_1$ und $\exists w_2 \in L_2 : x = w_1 w_2\}$ entscheidbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(5) Falls die Sprache A entscheidbar ist und für eine Sprache B gilt, dass $A \leq B$, dann ist auch B entscheidbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(6) Für jede Sprache L, die von einer DTM M akzeptiert wird, gibt es auch eine DTM M', die L entscheidet.

☐ Richtig ☐ Falsch

(7) Für jede Sprache L, die von einer DTM M in polynomieller Zeit akzeptiert wird, gibt es auch eine DTM M', die L in polynomieller Zeit entscheidet.

☐ Richtig ☐ Falsch

(8) Es gilt: $|\mathbb{N}| = |\bigcup_{i \geq 0} \mathbb{N}^i|$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(9) Eine Sprache L ist in NP genau dann wenn L durch eine NTM in polynomieller Zeit entschieden werden kann.

☐ Richtig ☐ Falsch

(10) Wenn ein NP-vollständiges Problem in P wäre, dann wäre $P = NP$.

☐ Richtig ☐ Falsch

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 2: (10 Punkte)

a) Konstruieren Sie eine 2-Band Turingmaschine M, welche die folgende Sprache in linearer Zeit entscheidet:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0^n 1^n 0^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

Verwenden Sie dazu folgende Tabellen, in der Sie die folgenden Arbeitsphasen umsetzen:

1. Überprüfe, ob w die Form $0^*1^*0^*$ hat und laufe zurück zum Anfang von 1^*.
2. Kopiere 1^*0^* von w auf Band 2 und laufe auf Band 1 und 2 zurück zum Anfang.
3. Prüfe, ob für $0^a1^b0^c$ auf Band 1 und 1^b0^c auf Band 2 gilt, dass $a = b$ und $b = c$ ist.

Beachten Sie dabei die folgenden Punkte:

- Für eine k-Band-Turingmaschine hat die Übergangsfunktion δ folgende Signatur:

$$\delta : Q \backslash \{q_{accept}, q_{reject}\} \times \Sigma^k \to Q \times \Sigma^k \times \{R, L, N\}^k$$

  D.h. die Kopfpositionen dürfen bei Übergängen auch unverändert (N) bleiben.

- Sie müssen die Übergangsfunktion nicht für alle Symbole $a_1, a_2 \in \Sigma$ definieren, sondern lediglich für die von Ihnen benötigten. Sie dürfen annehmen, dass die Übergangsfunktion bei nicht definierten Eingaben direkt in den verwerfenden Zustand geht.
- Existieren z.B. ein Zustand $p \in Q \backslash \{q_{accept}, q_{reject}\}$ und Symbole $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\ell, b_\ell \in \Sigma$ mit gleichem $\delta(p, a_i, b_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$, brauchen Sie die Ausgabe von $\delta(p, a_i, b_j)$ nicht für alle a_i, b_j zu definieren. Definieren Sie stattdessen für die entsprechenden Eingabesymbole Variablen a, b mit $a \in \{a_1, \ldots, a_\ell\}$, $b \in \{b_1, \ldots, b_\ell\}$ und definieren Sie $\delta(p, a, b)$ nur einmal.
- Zur Veranschaulichung sind zwei Einträge in der unten angegebenen Tabelle bereits vorgegeben.
- Nicht jede Zeile und Spalte in den vorgegebenen Tabellen muss ausgefüllt werden.

b) Für eine Sprache L sei $LEN(L) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists x \in L : |x| = |w|\}$. Zeigen Sie, dass die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen bezüglich LEN abgeschlossen sind.

Name:	Matrikelnummer:

Platz für Ihre Lösung zu Aufgabe 2a):

Definieren Sie hier Ihre verwendeten Variablen:

Phase 1:

δ	$(\triangleright, \triangleright)$				
q_0	$(q_0, \triangleright, \triangleright, R, R)$				
q_1					

Phase 2:

δ					

Phase 3:

δ					

Name:	Matrikelnummer:

Ersatztabelle für Aufgabe 2a)

Definieren Sie hier Ihre verwendeten Variablen:

Phase 1:

δ	$(\triangleright, \triangleright)$				
q_0	$(q_0, \triangleright, \triangleright, R, R)$				
q_1					

Phase 2:

δ					

Phase 3:

δ					

Name:	Matrikelnummer:

Platz für Ihre Lösung zu Aufgabe 2b):

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 3: (10 Punkte)

a) Betrachten Sie die beiden folgenden Sprachen:

$$A = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ gestartet mit } w \text{ akzeptiert}\}$$
$$B = \{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

Nutzen Sie die Tatsache, dass A unentscheidbar ist, aus, um mittels Reduktion zu zeigen, dass dann auch B unentscheidbar ist.

b) Der Satz von Rice besagt: Sei $\mathcal{L}_{re}$ die Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen und $\mathcal{L}$ eine nichttriviale Teilmenge von $\mathcal{L}_{re}$, d.h., $\mathcal{L} \neq \emptyset$ und $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_{re}$. Dann ist die Sprache

$$L_{\mathcal{L}} := \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathcal{L}\}$$

nicht entscheidbar.

Verwenden Sie den Satz von Rice um zu zeigen, dass die Sprache

$$FINITE = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert endlich viele Eingaben}\}$$

nicht entscheidbar ist.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 4: (10 Punkte) Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

$$\begin{aligned}\textsc{HittingSet} &= \{\langle N, S_1, \ldots, S_m, k\rangle \mid && S_1, \ldots, S_m \subseteq N,\ k \in \{1, ..., |N|\},\\ & && \exists U \subseteq N, |U| \leq k :\\ & && S_i \cap U \neq \emptyset\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textsc{SetCover} &= \{\langle N, S_1, \ldots, S_m, k\rangle \mid && S_1, \ldots, S_m \subseteq N, k \in \{1, \ldots, m\},\\ & && \exists M \subseteq \{1, \ldots, m\},\ |M| \leq k :\\ & && \textstyle\bigcup_{i \in M} S_i = N\}\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass HittingSet in NP ist.

b) Es ist bekannt, dass das SetCover Problem NP-vollständig ist. Benutzen Sie das Problem SetCover, um mittels Reduktion zu zeigen, dass auch HittingSet NP-vollständig ist.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 5: (10 Punkte)

a) Beim allgemeinen MaxCut Problem ist eine Instanz I gegeben durch einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{N}$ und die Aufgabe ist, einen Schnitt maximalen Gewichts in G zu finden.

Das Gewicht w eines Schnitts, der durch $S \subseteq V$ gegeben ist, ist definiert als

$$w(S) = \sum_{\substack{\{u,v\} \in E \\ u \in S, v \in V \setminus S}} c(u, v).$$

Die Entscheidungsvariante des MaxCut Problems (gegeben $\langle G, w \rangle$, gibt es ein $S \subseteq V$ mit $w(S) \geq w$) ist bekanntermaßen NP-vollständig.

Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit konstanter Güte für das allgemeine MaxCut Problem geben kann, es sei denn, P=NP.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Reduktion von der Entscheidungsvariante des MaxCut Problems zur Optimierungsvariante des MaxCut Problems.

b) Beim Problem Max-2BinPacking ist eine Instanz I gegeben durch eine Menge S von n Objekten mit Volumina $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$ und zwei Kisten mit Fassungsvermögen jeweils $C \in \mathbb{N}$. Eine zulässige Lösung $L = [S_1, S_2]$ betsteht aus zwei disjunktion Teilmengen S_1, S_2 von S, so dass das Volumen von S_1 und das von S_2 jeweils höchstens C ist, also die beiden Mengen in je eine Kiste gepackt werden können. Der Wert einer zulässigen Lösung ist die Anzahl der eingepackten Objekte, d.h. $|S_1|+|S_2|$. Gesucht ist L^* mit der maximalen Anzahl verpackbarer Objekte.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Objekte schon nach ihrem Volumen sortiert sind, d.h. $s_1 \leq \ldots \leq s_n$.

Die Entscheidungsvariante von Max-2BinPacking ist NP-vollständig.

Geben Sie einen einfachen Greedy Algorithmus für Max-2BinPacking an und zeigen Sie, dass dieser nur um höchstens 1 von einer optimalen Lösung abweicht.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)